第十章.常微分方程

微分方程的基本概念。

在大量的实际问题当中，往往并不能直接地得到所需要的函数，相反，常常能直接得到有关函数的导函数，或者有关变量的微分，并能建立起这些导函数与微分之间的方程，这就要求我们需要专门讨论通过这种方程求出所需函数的问题。

微分方程就是包含未知函数及其导函数的等式。其中出现的未知函数的导函数的最高阶次称为微分方程的阶。而如果把一个函数及其可能需要的导函数代入方程，就能得到一个恒等式，那么这个函数就是方程的一个解。

我们知道一个函数的原函数并不是唯一的，而是一族相差任意常数的函数。作为微分方程的解，同样一般的解，即所谓通解，是含有常数参数的，即这个参数可以取任意常数，而使得函数都是方程的解，微分方程的最高阶次是多少，就含有多少个相互独立的常数参数，这些常数参数，任意取值，都是方程的一个解，称为方程的特解。

在具体问题当中，常常并不只是要求得到通解，还会给出另外的条件，要求得到特解，这样的条件，就是定解条件，特别地，有时称为初始条件。

从几何的角度来看，一个微分方程的通解的函数图象，是一族相互之间可以通过平移而得到的曲线，称为积分曲线，每一条积分曲线就相当于方程的一个特解。

?

可分离变量的一阶微分方程。

研究微分方程的中心任务就是解方程。而对于微分方程来说，并不存在对于一般形式的方程的一般解法，而只能针对具体的方程形式研究它的解。

首先对于一阶微分方程的一般形式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

如果右边的二元函数可以写成两个变量的各自的函数的乘积的形式，即

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

的形式，那么这种方程就是最为简单的一阶可分离变量的方程。

这种方程可以直接通过积分而得到方程的通解：

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C。$$

进一步，如果给出初始条件

$y(x_0) = y_0$，

那么一般可以通过两种方法，求出特解，一是直接把初始条件代入通解而得到C的取值；二是利用初始条件所给出的特定点（x_0，y_0），作为解方程时所取积分的下限，直接使用变上限积分而得到特解。

一阶线性微分方程。

如果一阶方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的右边的函数为关于y的线性函数，那么就称为一阶线性方程。

一阶线性方程的一般形式可以写成

$y'+P(x)y=Q(x)$。

其中方程的右边称为方程的自由项。如果自由项恒等于0，则方程称为齐次的，否则为非齐次的。
首先把齐次一阶方程看成变量可分离方程，得到它的通解为

$y=Ce^{-\int P(x)dx}$。

然后利用所谓常数变易法通过齐次方程的通解而得到非齐次方程的解：
即设常数C为x的函数，使得上面的齐次方程的通解作为一般线性方程的解，反过来求出C（x），最后，就可以求出一般线性方程的通解为

$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

齐次型方程和伯努利方程。

上面所讨论的是两种最为基本的一阶方程可积类型，我们还可以把其他类型的一阶方程化成这两种基本类型而得到解。

如果一阶方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的右边的函数，对于任意的实数t，都满足

f（tx，ty）=f（x，y），
那么这种方程就称为一阶齐次型方程。

对于这种方程只要通过引入一个新的变量 $u=\frac{y}{x}$，就可以把原来的方程化成一阶可分离变量的方程。

即f（x，y）可以写成f（1，y/x），使得原方程可以写成

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，

然后进行变量替换，得到变量可分离方程

$u'=\frac{g(u)-u}{x}$。

有时，如果取x/y为新变量，有可能使得方程更为简单，这需要根据具体情况来加以选择。
形状为

$y'+P(x)y=Q(x)\,y^n$

的方程称为伯努利方程。

把这种方程两边同时乘 y^{-n}，再通过引入变量 $u=y^{1-n}$，就可以把原方程变换为一个一阶线性方程，从而得到通解为

$y=Ce^{-\int P(x)dx}$。

全微分方程。

对于形式为

$$P(x,y)dx+Q(X,y)dy=0$$

的方程，如果还满足条件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

那么方程称为全微分方程。

它的通解为

$$u(x,y)=\int_a^x P(x,y)dx+\int_b^y Q(a,y)dy=C$$

或者是

$$u(x,y)=\int_a^x P(x,b)dx+\int_b^y Q(x,y)dy=C,$$

其中（a，b）为定义域内的恰当选择的一点。

可降阶的高阶微分方程。

上面我们处理了一些典型的一阶方程，一般来说，低阶方程总是要比高阶方程简单，因此对于高阶方程，我们总是首先希望能够化成低阶方程。

（1） $y^{(n)}=f(x)$ 类型的方程。

这种类型的方程，由于右边为只含x的函数，因此只需要通过n次积分，即可得到通解。通解中，含有n个常数参数。

（2）不显含因变量的二阶微分方程。

如果方程形式为

$$y''=f(x,y'),$$

则可以通过变量替换 $u=y'$，而把原方程变换为一阶方程

$$u'=f(x,u),$$

如果能够解出这个一阶方程，也就解出了原方程。

（3）不显含资本了的微分方程。

如果方程形式为

$$y''=f(y,y'),$$

则可以通过变量替换 $u=y'$， $y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$，就可以把原方程变换为一阶方程

$$u\frac{du}{dy}=f(y,u),$$

如果能够解出这个一阶方程，也就解出了原方程。

二阶线性微分方程及其解的结构。

二阶线性微分方程发一般形式为

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$$ 。

其中自由项R（x）如果恒等于0，则为齐次的，否则，则为非齐次的。而如果P，Q都是与x无关的常数，则方程为常系数的，否则，为变系数的。

一个一般二阶线性方程的解与它相对应的齐次方程的解，具有一定的结构关系，即：

一般方程的任意特解与相应的齐次方程的通解之和为一般方程的通解。

因此，对于一般二阶线性方程的解的问题，中心就是它的相应的齐次方程的解的问题。

关于齐次方程的解，具有很好的结构性质，即

如果已知线性齐次方程的两个解，那么这两个解的任意线性组合也是方程的解。

更为一般地，我们可以得到齐次方程的通解的结构：

如果已知线性齐次方程的两个在区间[a，b]上线性无关的解，那么这两个解的线性组合就是方程的通解。

二阶线性常系数方程

特别地，我们仔细讨论一下二阶线性的常系数方程，因为这一类方程在实际问题当中是非常常见的，又是比较简单，我们能够处理的。

（一）齐次的情形。

我们知道齐次的情形是一般情形的基础。

这种方程的求解关键在于它的特征方程，根据特征方程的解的不同情况，就有不同的微分方程的解，我们归纳如下：

对于特征方程

$$l^2+pl+q=0$$ ，

（1）如果 $p^2-4q>0$ ，则特征方程存在两个不同的实根 l_1 与 l_2 ，这时微分方程存在通解为

$$y=C_1e^{l_1x}+C_2e^{l_2x}$$ ；

（2）如果 $p^2-4q<0$ ，则特征方程存在两个共轭的复根 $l_1=a+ib$ 与 $l_2=a-ib$ ，这时微分方程存在通解为

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$$ ；

（3）如果 $p^2-4q=0$ ，则特征方程存在两个相等的实根 $l=-\frac{p}{2}$ ，这时微分方程存在通解为

$$y=e^{lx}(C_1+C_2x)$$ 。

（二）非齐次的情形。

我们已经知道了齐次情形的通解，那么由于非齐次方程的通解与齐次方程的通解具有简单的关系，即只是相差一个非齐次方程的特解，那么剩下的任务，就是求出非齐次方程的一个特解。

对于自由项为一些特定类型的函数，例如指数函数，正弦函数或者余弦函数，多项式，以及这些类型的函数的和与积时，可以采用待定系数法进行求非齐次方程的特解。

（1）自由项 $f(x)=e^{ax}P_n(x)$ 的情形。

这时特解为

$y_p(x) = x^k e^{ax} Q_n(x)$，

其中a为特征方程的k重特征根，其中n次多项式Q_n（x）的系数可以通过待定系数法得到。

（2）自由项 $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + P_l(x)\sin bx]$ 的情形。

这时特解为

$y_p(x) = x^k e^{ax}[Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx]$，

其中k为特征方程的根 $a+ib$ 的重数，其中m次多项式Q_m（x）和R_m（x）的系数可以通过待定系数法得到，m为n和l中间的大数。