第二章.极限概念 函数的连续性

如果说对于函数的概念，我们总是能够从日常直观出发，就能很好地加以理解，因为毕竟因果关系的观念在我们的意识当中是非常深根蒂固的。那么要真正严格地理解极限的观念，就不是那么自然的了。

对于极限的观念，最为关键的问题是，极限的模糊形象是谁都有的，但是如何定量地加以描述，从而是可以应用来作为一般的判别标准的呢？

这个问题实际上困扰了人们几百年，一直到19世纪才加以解决的。

数列的极限。

数数是人类最原始的数学活动，应该说，对于数数我们没有更多的数学方面的分析可言的了，或者说至少从数学的角度而言，数数是一个足够清楚而明确的行为。因此我们引入极限这么一个抽象概念就从数数开始。

最为主要的一种事物运动变化的方式，是一种给人以连续性的感觉的变化。对于这样的变化方式，我们可以有两种研究方式，一是属于物理学范畴的研究方式，就是说去探讨事物变化发展中表现出来的连续性，究竟是一个什么样的过程。另一种研究方式是并不考虑所谓连续性究竟是什么回事，而是首先人为地定义一种明确的可以定量处理的连续性，使得我们对于一般事物变化发展的描述都具有这种连续性的特点，并且总是在这种应用当中，随时对实际过程与理论推理进行验证与对比，从而得到使用这种人为连续性的观念的合理性，一直到实验表明再也不能使用这个人为前提为止。

确实，我们应该学会承认，当我们对客观事物进行描述与分析时，肯定是要基于一些前提条件或者说假设的，问题的关键，不是在于我们是不是应该首先证明了这些前提的正确性，才能再来进行随后的工作，而是承认任何的理论工作都只是相对的，是否有用必须经过实验的证明才能决定。

现在我们的主要工作就是建立一个关于日常生活的连续性的严格表述。而这个概念是可以从我们进行最为简单的数数开始的。

设存在一个数列，也就是一个数值的集合，这个集合的元素可以一个一个的数出来，同时，每一个元素都可以加上唯一的标志，而自然数是最为适宜作这件工作的。比如说，把一个数列写成这样的样子：

$a_1, a_2, a_3, \ldots.$，或者简单地记成$\{a_n\}$。

显然，可以想象，随着我们的数数，这个数列的取值，就会发生某种变化，（当然，对于总是取同一个数值的数列，我们没有什么兴趣。）这种变化的过程应该说是相当明确而没有任何含糊与抽象的地方。

然后，我们来规定一种具有特定规律的数列变化过程：

对于数列$a_1, a_2, a_3, \ldots.$，假设存在一个确定的常数a，现在我们考虑变量$|a_n - a|$（显然这是一个反映数列数值变化的，随着n而发生变化的变量。），如果我们任意找到一个数e，无论它的数值有多么大或者多么小，我们总是能够在这个数列当中找到一个元素a_N，使得在这个元素后面的所有的数列元素，都使得相应的变量$|a_n - a|$的数值小于e，换一句话来说，就是，对于任意的e，总是存在一个N，使得当n>N时，总是有

$$|a_n - a| < e$$

成立，这时我们就把a称为数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$的极限。并且称数列$a_1, a_2, a_3, \ldots.$收敛于极限a。我们使用记号$\lim_{n\to\infty} a_n = a$来表示这点。否则我们就说数列$\{a_n\}$是发散的。

这就是一个数列收敛于一个极限或者说存在一个极限的定义。

在这个定义里面，最为关键的地方，也是初学者最为困难的地方有两个：

1。数值e是任意的。实际上也就是说，只要存在一个e的数值不满足定义的条件，就不能说数列收敛于极限a。

这里初学者感到非常困难的地方是，我们是不是一定要对所有可能的e都进行检验，才能得到最后的判断呢？在实际问题当中，由于我们的目的是希望知道变量$|a_n - a|$是否越来越小，因此一般总是只要取e大于0，并且足够小（以后我们在有关极限的定义当中，总是先假设了这点，记住这点并非是必要的，而是方便的），当然只是这样还不能减少我们对e的任意取值进行验证的任务，关键在于，我们一般所处理的数列，总是按照某种特定的规律来变化或者说是按照某种特定的规律来定义的，这样一般从这个数列的变化规律本身，就可以足够使得我们进行判断，并且还有可能找到一个特定的由e决定的N的值，使得条件得到满足，或者是可以找到反例。

实际上本章的最困难的地方就是如何判断一个数列是否存在极限，如果存在的话，又如何得到这个极限。这里最重要的方法是应用不等式。

不过，我们的课程在这个方面的要求并不是过高的，因此我们只是需要考虑一些比较简单的例子，而我们的精力应该集中在对于极限思想的理解。

1． 满足条件的n必须取遍所有大于N的自然数。

初学者往往会觉得这是不可能的，实际上，我们并不需要对所有大于N的n值进行检验，同样由于数列的变化是具有规律的，从生成数列本身的规律，我们一般总是能够通过有限的步骤，来得到所需要的判断。

那么究竟所谓生成数列的规律是什么呢？一般说来，一个数列的元素总是一个由变量n决定的函数，这里变量n取遍自然数，就生成了数列的全部项。这个函数的表达式称为通项a_n的通项公式。

不过通项公式有时候并非完全只是n的函数，而是同时由变量n和第n项之前的项所决定，这时，通项公式表现为一个递推公式，这种情况的处理比较复杂，我们不过多的涉及。

实际上对于上面的第二点，如果我们把希望得到的结论放弱一点，就还可以有第二种更为方便的说法，这就是相当重要的柯西收敛原理：

我们说数列$\{a_n\}$收敛，它的充要条件是：对于任意的$e>0$，总是存在正整数N，使得对于任意的自然数p和n>0，有

$$|a_{n+p} - a_n| < e$$

成立。

可以看到，在这里对数列所进行的检验与极限的定义当中对数列所进行的检验是存在一点差异的，就是在这里对数列进行检验，我们并不需要知道这个数列的极限究竟是多少，而通过检验，我们也只是知道这个极限是否存在极限。而在极限的定义当中，要对一个数列进行检验，实际上是预先假设知道了这个极限是多少，所谓的检验只不过是证明这个数列的极限是否这个给出的极限值。

因此，在实际问题当中，应用柯西原理是更为方便的检验方法。

在说明了一个数列的极限的含义以后，我们就可以得到一系列的这种极限过程的性质如下：

（1）数列$\{a_n\}$以a为极限的另一个说法，或者说一个充要条件是：对于数列$\{a_n\}$的任意一个子数列$\{a_{n_i}\}$都以a为极限。

这种说法一般并不是应用于正面的结论，因为这就意味着我们要取一个数列的任意子数列来进行验证，这反而把事情搞复杂了，但一般说来更难以说明正面结论的判据，往往更易于说明反面结论，这也就

是说，我们常常可以很方便地应用这个判据来说明某个数列是发散的，因为，我们只要能够在一个数列里，构造出一个发散的子数列，或者是构造出两个具有不同收敛极限的子数列，就可以说明这个数列是发散的。

（2）如果两个不同数列具有相同的极限：$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$，而另外一个数列$\{c_n\}$满足条件：存在一个确定的自然数N，当n>N时，总是有

$$a_n \le c_n \le b_n$$

成立，那么数列$\{c_n\}$收敛，并且极限为c。

这个性质被称为夹逼定理，常常用来求某个合适的数列的极限，前提是已知另外两个数列的极限，并且这三个数列具有定理所要求的关系。

（3）如果我们把数列看成是以自然数为自变量的函数，那么就可以相应地定义这个函数的有界性和单调性，这两个概念是相当直观的，并且显然可以知道一个收敛数列必然是有界的，因为按照收敛的定义，满足

$$|a_n - a| > e$$

的项总是有限的，因此总能够得到一个确定的函数的界。

反过来，则还必须加上一个条件：

单调而且有界的数列必定存在极限。

这是一个相当重要的极限存在定理，因为往往判定一个数列的单调性和有界性是比较容易的。

从这个定理可以得到一个条件比性质（1）更弱，但结论一样的极限存在定理：

（4）如果数列$\{a_n\}$的子数列$\{a_{2k+1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛于同一个极限，那么数列$\{a_n\}$也收敛于这个极限。

显然这个定理比性质（1）所需要的条件更弱，但结论是一样的，这是因为我们选取了特定的子数列。

（5）如果一个数列是由两个收敛数列通过四则运算得到的，那么这个数列的收敛性质就完全由这两个数列决定，这就是数列极限的四则运算性质：

a．$\lim k\, a_n = k \lim a_n$ 其中k为实数；

b．$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$；

c．$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$；

d．$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$，其中 $\lim b_n \ne 0$。

函数的极限。

上面对于数列的讨论，完全可以看成是对于一种最为简单的函数的极限的讨论，这里唯一的差别，就是一般的函数的取值往往是连续的，而数列的取值是可以用自然数计数的。

这里数值的连续性，或者说实数的连续性，仍然是我们不清楚的概念，尽管这是一个微积分最为基本的概念，是我们下面讨论的一个基础，但是由于本课程的限制，我们不学习艰涩的实数连续统理论，因此从逻辑的角度来讲，我们只能是预先承认一种直观上的连续性观念，而实际上，这种直观观念对于我们下面的学习，也是足够了的。

尽管数列的项是可以用自然数计数，但在数列的极限定义当中，我们并没有依赖于在实际的检验当中，进行逐项的比较，也就是说，在极限的定义当中，数列的这种离散取值形式是无关紧要的。我们仍然可以仿照数列的极限的定义，说明一个函数的极限的定义。

不过我们还必须首先考虑一个函数与数列的形式方面的差别。

我们知道，一个数列所表示的变化，是具有明确的自变量变化形式的，即随着自然数的增大而变化，而一个一般函数所表达的，则只是一般的自变量与因变量的数值对应，而并没有更具体地要求指明自变量与因变量的变化过程是如何进行的，函数的这种属性，实际上也正是函数的抽象能力之所在。那么我们如何考虑在一个函数所表达的变化过程当中可能存在的极限现象呢？类似于数列的极限过程里面，自变量可以取得任意大一样，在函数的极限过程里面，可以考虑自变量与某一个特定值的距离任意小。我们知道一个数列如果收敛，那么它的极限肯定是唯一的，这也可以说是极限概念之所以有意义的地方。而对于一个函数来说，同样必须考虑自变量在一定的变化方向上的函数变化性质，即如何定义函数的具有唯一性质的极限。这里所谓自变量的变化方向，就是指自变量与某个特定值的距离任意小的意思。

为了说明自变量与某个特定值的距离任意小这种函数变化的特定形式，我们定义一个特定的概念，就是邻域的概念：

对于确定的一个实数x，我们定义它的一个邻域，是指一个开区间$(x-e, x+e)$,这个开区间的特别之处在于e可以看成是一个变量，并且一般是可以取任意小的数值的变量，因此这个开区间的特别之处在于，这个开区间的大小是可以任意地小。邻域这个概念在下面函数的极限定义当中具有关键的作用，希望同学们认真加以体会。

首先假设函数f（x）在点x_0的邻域$(x-d, x+d)$内有定义，而在x_0点上不一定需要有定义。如果存在一个确定的点A，而我们如果取点A的任意一个邻域$(A-e, A+e)$，都可以找到相应的点x_0的邻域$(x-d, x+d)$,使得对于函数y=f（x）来说，只要自变量x属于邻域$(x-d, x+d)$里，就有因变量y属于邻域$(A-e, A+e)$，这样我们就可以说当函数自变量x趋向于点x_0时，函数以A为极限，记成$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

我们也可以不使用邻域是概念，直接使用实数之间距离的概念，以类似于数列极限的形式来说明函数的极限：

对于函数y=f（x），假设存在两个确定的常数x_0和A，现在我们分别考虑变量$|x-x_0|$（这个变量反映了函数自变量和一个确定的点之间的距离）和$|f(x)-A|$（显然这是一个反映函数数值变化的，随着x而发生变化的距离变量。），如果我们任意找到一个数e，无论它的数值有多么大或者多么小，我们总是能够找到一个相应的数d，使得变量$|x-x_0|$满足

$$0<|x-x_0|<d$$

时，都使得相应的变量$|f(x)-A|$的数值小于e，换一句话来说，就是，对于任意的e，总是存在一个d，使得当

$$0<|x-x_0|<d$$

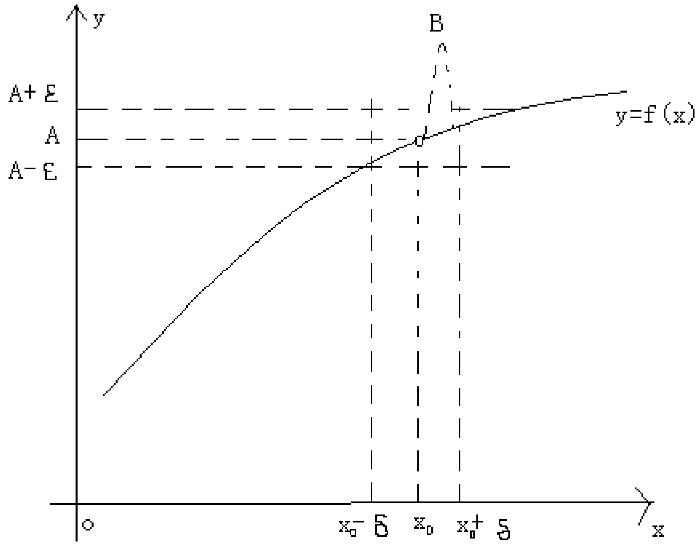
时，总是有

$$|f(x)-A|<e$$

成立，这时我们就把A称为函数f（x）在x趋向于x_0时的极限。我们使用记号$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$来表示这点。否则我们就说函数f（x）在x趋向于$x_0$时是发散的。

由于函数变化的连续性，使得函数的极限的概念比数列的极限的概念要显得复杂，因此我们还可以通过图形的方式来加强理解。

如下图所示，我们可以分别观察在X轴和Y轴上的取值情况。



可以看到，在x的取值向x_0接近的过程中，函数y=f（x）表现出了这么一种现象，就是在Y轴上存在一点A，无论我们取多么小的A的一个邻域，我们都总能至少找到x_0的一个邻域，使得在这个邻域内的所有函数值都处于我们取定了的A的那个邻域内，这就说明了函数在x趋向x_0时，存在一个极限A。

假如在x_0的这个邻域内存在一点，使得函数值超出了A的那个邻域，比如函数的图形如图中虚线所示，突出一个峰B点，那么我们总是还可以在继续向x_0接近的过程中，找到更小的邻域满足条件。

注意，在图中我们故意没有使得$f(x_0-d)=A-e,$也没有使得$f(x_0+d)=A+e,$尽管是实际问题当中，我们可能常常这么取，但这并不是必须的。因为在定义当中，只是要求一种存在性就可以了。

另外在图中，我们也可以看到，极限的存在并不要求函数在x_0是有定义的，只要函数能够无限地接近这点就可以了。

从图形当中我们可以体会到，函数在某点存在极限，反映的是函数在这点附近的局部性质，这里附近的意思是指与任何确定距离处函数的性质无关，就好象图中虚线所示，无论函数如何变化，只要这种变化被限制在确定的距离处，就不影响函数在这点处的极限性质。实际上，函数在这点是否具有这个极限性质，是分析函数在这点的行为的一个强大工具。后面的学习当中，我们能够进一步体会到，判断一个函数在某点处是否具有极限，是表示函数在这点行为的重要特征。

函数的单侧极限，左右极限，函数的分段点处的极限。

在前面的图形说明当中，我们可以看到，函数自变量的取值趋向某个特定的点，还可以取特定的方向，比方说只从左边或者只从右边接近特定的点，这在函数所表示的变化规律本身常常是允许的。这就自然地得到了单侧极限的概念。

根据自变量趋向某点的方向的左右，可以把单侧极限分成两种，即左极限与右极限。顾名思义，左极限就是在X轴上，自变量总是从左边趋向特定的点，也就是说，自变量在趋向这个特定的值时，总是小于这个值；反之右极限就是在X轴上，自变量总是从右边趋向特定的点，也就是说，自变量在趋向这个特定的值时，总是大于这个值。

引入这个概念，首先在理论上具有重要的作用，这体现在如下的定理当中：

一个函数在自变量趋向某点时具有极限A，这件事的另一个说法，或者说它的一个充要条件就是函数在这点的左右极限都存在，并且都是A。

这个定理可以应用于对很多函数在特定点的极限性质的判断，当然一般是应用于否定性的判断，即通过很容易地得到函数在这个特定点的左右极限，由于它们不相等，而得到函数在这点不存在极限的结论。

这个定理还具有另外一个方面的实际应用价值，就是用于分析分段函数。我们知道分段函数在分段点处的性质是分段函数最为关键的地方，而对于分段函数在分段点处的极限性质，就只有通过分别地考虑函数在分段点处的左右极限来得到。

无穷小量，无穷大量，无穷小量的阶。

在微积分的历史上，一种具有重要意义的极限过程，即无穷小量充当了很关键的角色。而在理论的角度来看，这种极限过程也是非常有用的。

所谓无穷小量就是这样一种函数的极限过程，即当函数自变量趋向于某个特定的值时，函数值本身趋向于0，直观地说，也就是函数值要多小就有多小。更清楚地说明这点，就是：

对于任意的e，总是存在一个d，使得当

$$0<\left|x-x_0\right|<d$$

时，总是有

$$\left|f(x)\right|<e$$

成立。

这里的f（x）在x趋向于x_0时，就是无穷小量。

正如一个函数的极限和这个函数在这点的取值不能混为一谈一样，无穷小量和0不能混为一谈。无穷小量是一种极限过程，可以理解为是“运动物体”，而任何一个确定的数值，总是一个“静止物体”。一个无穷小量可以达到和0无限地接近而总是不能取值为0，因为极限过程毕竟表达的只是一个变量的变换过程。

把无穷小量看成是以0为极限值的函数，则同样可以对它进行四则运算，我们可以得到如下定理：

（1） 有限个无穷小量的和仍然是无穷小量。

（2） 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量。

（3） 常数和无穷小量的乘积是无穷小量。

（4） 有限个无穷小量的乘积是无穷小量。

既然以0为极限的函数具有特定的研究价值，那么反过来，比方说无穷小量的倒数，是趋向于无穷大的，也是具有一点价值的研究对象。这就是所谓无穷大量。

类似地，我们可以定义无穷大量为当函数自变量趋向于某个特定的值时，函数值本身趋向于无穷大，直观地说，也就是函数值要多大就有多大。我们更清楚地说明这点，就是：

对于任意的e，总是存在一个d，使得当

$$0<\left|x-x_0\right|<d$$

时，总是有

$$\left|f(x)\right|>e$$

成立。

这里的f（x）在x趋向于x_0时，就是无穷大量。

无穷小量最为重要的研究价值，体现在我们可以对它的趋向于0的“速度”进行比较。这种比较的结果，就得到了阶的概念。

设在同一个极限过程当中，a 和 b 都是无穷小量，如果

（1） $\frac{a}{b} \to 0$，那么 a 关于 b 就是高阶无穷小量，反过来 b 关于 a 就是低阶无穷小量。写成 $a = o(b)$。

（2） $\frac{a}{b} \to 1$，那么 a 和 b 就是等阶无穷小量，写成 $a \sim b$。并且称 a 和 b 互为主要部分。

（3） $\frac{a}{b} \to a, (a \neq 0)$，那么 a 和 b 就是同阶无穷小量，写成 $a \sim a\, b$。

一般说来，如果存在常数A>0和B>0，使得

$$A < \left|\frac{a}{b}\right| < B$$

成立，那么 a 和 b 就是同阶无穷小量，写成 a =O（b）。

（4）一般的无穷小量的比较，可以通过定义一个基本无穷小量，即定义函数x=x在x趋向于0时的x为基本无穷小量，则当 $a = O(x^k)$ 时，（k为正数。）称 a 为k阶无穷小量。

特别地，如果 $\frac{a}{x^k} \to a, (a \neq 0)$，那么 a 和 $a\, x^k$ 就是同阶无穷小量，是等价的，并且称 $a\, x^k$ 是无穷小量 a 的主要部分。

应用无穷小量的阶的性质，可以简化极限计算与近似计算，下面是相关的一些定理：

如果 $a \sim b$，$a' \sim b'$，其中 b，a'，b' 都不取0值，则

（1）当 $\lim \frac{b}{b'}$ 存在时，$\lim \frac{a}{a'}$ 也一定存在，并且 $\lim \frac{a}{a'} = \lim \frac{b}{b'}$。

（2）如果 $\lim \frac{bf(x)}{b'}$ 存在，则 $\lim \frac{af(x)}{a'} = \lim \frac{bf(x)}{b'}$

（3）如果 $\lim a' f(x)$ 存在，则 $\lim af(x) = \lim a' f(x)$。

这几个定理都表明应用等阶无穷小量进行替换，不会改变结果，这样就有可能用来进行极限计算的简化。

（4）如果 $a \sim b$，则有 $a - b = o(a)$ 和 $a - b = o(b)$。反过来也成立。

这个定理则是进行近似计算的基本定理，即用主要部分代替一个变量，误差为一个高阶无穷小。

极限的四则运算法则。

在研究数列的极限时，我们已经讨论了数列极限的四则运算性质，对于函数的极限，具有同样的性质，因为这种运算性质只涉及到极限过程本身，与是数列还是函数无关。我们列出如下：

首先假设函数f（x）和g（x）都在自变量x趋向于x_0时存在有限的极限，那么就有下面的运算规则，（我们简写了极限符号，都是表示 $x \to x_0$）：

a．$\lim kf(x) = k\lim f(x)$ 其中k为实数；

b．$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$；

c．$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$；

d．$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$，其中 $\lim g(x) \neq 0$。

注意这里函数的运算规则里面包括了减法，而数列的减法则没有一般的运算规则。

函数除了通过四则运算进行构造以外，另一个重要的函数构造途径就是函数的复合，那么复合函数的极限与其组成函数的极限有什么关系呢？

（1） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$， $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$；

（2） 设存在x_0的一个去心邻域。对于在这个邻域内的所有x都有 $g(x) \neq u_0$，也就是说，在x趋向于x_0的过程当中，g（x）不会取值u_0；

在这两个条件下，我们有

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A$$

这个法则对于我们求函数的极限是非常有用的，因为常常需要进行变量代换，使得复杂函数变换为比较简单的函数，从而得到所需要的极限。

极限存在的判别性质。

类似于数列极限的夹逼定理，同样存在函数极限的夹逼定理：

设两个函数g（x）和h（x）在 $x \to x_0$ 时，存在同一个极限A，而在x_0的去心邻域里，存在另一个函数f（x）满足以下条件：

$g(x) \le f(x) \le h(x)$，

那么在 $x \to x_0$ 时，f（x）也存在极限A。

在有关函数极限的问题当中，记住重要的一点，就是函数的自变量只需要考虑在它所趋向的点的去心邻域内的定义即可。

这个定理在某些条件下，可以应用于求函数在某点的极限，即如果已知两个具有简单极限性质的函数，和要考虑的函数具有上面不等式所要求的性质，则可以直接得到所考虑函数的极限性质。

利用这个定理，可以得到重要的两种形式的函数的极限。

两个重要极限。

对于这两个极限，重要的是抓住它们的结构特征：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$。

这个极限的结构特征可以表示为：

$$\lim_{() \to 0} \frac{\sin()}{()} = 1,$$

也就是说，括号里的部分是无穷小量。这个极限可以应用于求很多函数的极限。

（2）$\lim\limits_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^{x} = e$

这个极限的结构特征可以表示为：

$$\lim_{() \to \infty} (1+\frac{1}{()})^{()} = e$$

也就是说，括号里的部分是无穷大量。这个极限同样可以应用于求很多函数的极限。

我们在后面的练习当中，会遇到很多的例子。

函数的连续性，单侧连续性。

我们已经提到过实数的连续性，不过实数的连续性是比较困难的概念，我们不要求掌握，至于这里的函数的连续性，则是另外一个概念，应用极限作为工具，可以很好地加以说明。

在上面的关于函数极限的图形说明当中，我们提到一个直观问题，就是存在极限，就意味着随着自变量趋向给定的点，我们希望函数值与极限值之间的距离有多小，就可以通过找到一个与给定点足够接近的自变量值，使得这个自变量取值和给定点之间的所有的自变量取值所对应的函数值，都与极限值之间的距离是足够小的。

针对我们关于函数连续的直观观念，我们讨论下面的三种情况：

（1）如果函数在某点不存在有限的极限，那么函数在这点的表现肯定是不符合我们关于连续的直观的。这也就是说，函数在这点存在极限，是函数在这点连续的必要条件。

那么函数在这点存在极限是否就是在这点连续了的呢？

（2）我们在讨论函数极限时，强调了函数并不一定必须在这点是有定义的。如果函数在这点都没有定义，那么显然函数就不可能在这点是连续的了。

（3）如果函数在这点是有定义的，而函数在这点的极限并不是函数在这点的函数值，那么可以想象，函数的图形仍然不符合我们关于连续性的观念。

因此在直观上，可以很容易地接受下面的连续性定义：

我们说函数在某点是连续的，意思是说

（1） 函数在这点的某个领域内有定义；

（2） 函数在这点存在极限；

（3） 函数在这点的极限等于函数在这点的函数值。

上面的定义里，（2）（3）两条还可以使用另外的说法，因为这里的关键实际上就是极限的概念。

直观地说，函数在某点连续，就是函数值在极限值处的邻域想要多小就可以多小，只需要我们取给定点的足够小的邻域即可得到相应的足够的函数值区间。精确地说，就是：

我们说函数在某点 x_0 处是连续的，意思是说

（1） 函数在这点的某个领域内有定义；

（2） 对于任意给定的 e，总是存在某个 d，使得只要

$|x - x_0| < d$ ，

就可以得到相应的

$|f(x) - f(x_0)| < e$ ，

注意与极限定义相比，这里$|x - x_0|$没有要求大于0，而是存在等于0的情况。

我们可以看到极限与连续存在紧密联系，相应于单侧极限的概念是单侧联系，它正是通过单侧极限来定义的：

函数在某点存在左极限，并且左极限值等于函数在这点的因变量值，这称函数在这点左连续；

函数在某点存在右极限，并且右极限值等于函数在这点的因变量值，这称函数在这点右连续。

显然函数在这点连续的一个充要条件就是函数在这点同时左连续与右连续，左右极限值都同时等于函数在这点的因变量值。

同样这种单侧连续概念可以应用于研究分段函数。

最后，我们可以看到，类似于极限性质是一种局部性质，这里定义的连续性同样是函数在一点的局部性质，只是依赖于函数在这点的某个邻域的行为。而我们应该已经能够体会到，邻域概念本身就是一个表达一点的局部范围的概念。

那么对于一个函数，如果它在定义域的每一点都是连续的，则称函数在它的定义域上都是连续的。

连续函数的运算性质，初等函数的连续性。

非常类似于极限的运算性质，对于连续性，由于它的极限本质，同样存在相应的四则运算性质和复合性质：

1．设函数f（x）和g（x）在x_0处连续，则函数

（1） $af(x) + bg(x)$，其中a，b为任意常数；

（2） $f(x) \cdot g(x)$ ；

（3） $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中g（x）不能等于0。

都在x_0处连续。

2．设函数u=g（x）在x_0处连续，函数y=f（u）在u_0处连续，g（x_0）= u_0，那么函数y=f[g（x）]在x_0处连续。

有了这两个基本定理，我们从基本初等函数的连续性开始，可以一步一步地得到初等函数的连续性，即任意初等函数在其定义域上的每一点处都是连续的。

这个结论具有极其重要的价值。后面我们可以看到，初等函数的这个性质使得我们对它们的处理大大简化了。

间断点及其分类。

前面我们已经把函数在某点连续的意思概括为三点，那么相应的，如果说一个函数在某点不连续，或者说发生了间断，就必定是出现了三种情况之一：

（1） 函数在这点没有定义；

（2） 函数在这点不存在左右极限之一或左右极限都不存在；

（3） 函数在这点的左右极限与函数在这点的函数值至少有一个不相等。

因此我们可以把函数发生间断的情况分成三类：

（1）函数在这点的左右极限都存在，并且相等，而与函数在这点的函数值不相等，或者函数在这点

根本就没有定义，我们知道，这在函数的极限定义里，是可以允许的。这种间断点，由于只要通过重新定义函数在这点的函数值，就可以得到一个在这点连续的新的函数，因此称为可去间断点。

（2）函数在这点的左右极限都存在，但不相等，这时无论函数在这点的函数值如何，都把这种间断点称为第一类间断点。

（3）函数在这点的左右极限至少有一个不存在，这时，称为第二类间断点。

对于这三类间断点，我们必须拥有很好的直观，因为图形直观可以帮助我们直截了当地解题。

闭区间连续函数的性质，中值，最值。

通过前面的学习，我们可以体会到，所谓函数的连续性，其实是保持一个连续区间的连续性的任意变换。

而所谓区间的连续性，直观地看，就是实数轴上面的一个线段区间，而函数的连续性，就正是体现在把X轴上面的一个连续线段区间，变换为Y轴上面的一个连续线段区间。

对于所谓实数区间的连续性，我们只能从直观的角度来把握，而不能作更进一步的理论探讨，因为这超出了本课程的范围。不过基本的直观对于我们下面的学习是足够了的。

对于连续函数或者说连续变换来说，实数轴上面的闭区间具有非常重要的意义，首先我们给出一个基本定理：

连续函数把一个有限闭区间变换为一个有限闭区间，或者说，定义在有限闭区间上面的连续函数的值域也是有限闭区间。

从这个基本定理出发，我们可以从下面的几个定理体会到闭区间对于连续函数的意义之所在：

（1） 定义在一个闭区间上面的连续函数，必定存在函数在这个区间上面的最大值与最小值。这就是所谓最值定理。

（2） 定义在一个闭区间上面的连续函数，必定是有界的。这就是所谓有界性定理。

（3） 定义在一个闭区间[a，b]上面的连续函数f（x），对于满足f（a）<c<f（b）的任意的c值，总是存在一个相应的 $x'\in[a,b]$，使得 $f(x')=c.$ 这就是所谓介值定理。

（4） 定义在一个闭区间[a，b]上面的连续函数f（x），如果f（a）·f（b）<0，则总是存在一个 $x'\in[a,b]$，使得 $f(x')=c.$ 这就是所谓零值定理。

（5） 如果函数y=f（x）为在闭区间[a，b]上面严格单调增加（减小）的连续函数，f（a）=A，f（b）=B，则在闭区间[A，B]上面存在f的反函数x=g（y）为严格单调减小（增加）。这实际上是极其基本的反函数存在定理。

二，答疑解难。

1．数列的极限的定义当中，e 与N的取值是一一对应的吗？

[答]：不是。

初学者对于极限的定义的叙述往往理解不够深入，并且常常产生歧义，这个问题就是最为典型的。

尽管在根据定义进行具体的极限分析时，常常是由 e 推出N的表达式，但这并不是意味着这两个变量之间具有一定的函数关系，这两个变量之间确实是具有一定的关系，但决不是函数的关系，而是一种两个区间的相互影响与决定的关系，实际上，我们给出一个 e 的意思，实际上是给出了一个区间，同样由此而得到的N，也是一个区间的概念，而不是两个数值变量的关系，因此N的求法是很多形式的，实际问题当中，我们只是选择了最为方便的形式而已。

2．函数的极限的定义当中，e 与 d 是取值是一一对应的吗？

[答]：不对。

这里的原因与数列的情形是类似的。这两个变量同样是意味着两个区域，而并不是两个数值变量的关系。因此在作具体问题时，可以灵活地选择最为方便的途径来求出它们的对应关系。

3．函数的极限的定义当中，不等式 $0<|x-x_0|<d$ 里面大于0是必要的吗？

[答]：是。

初学者往往忽略了这点，因为在数列的极限的定义当中不存在这个问题。

这里的意思其实就是取x_0的去心邻域。因为函数可以对某点取极限，而同时函数不一定需要在该点有定义，这种情况在实际问题当中是有必要考虑的，因此为了照顾到这种情况，就在定义当中加入了这点要求，而同时不会损害极限的定义本身。

4．求极限的主要方法有哪些？

[答]：在求极限之前，要注意观察，通过观察来判断需要应用什么样的途径与方法，而不是盲目尝试，一般的方法有如下的几种，其中有些方法是基于后面的知识，我们也列出，以供参考：

（1） 对于函数在连续点的极限，直接代入即可；
（2） 运用消去零因子的方法；
（3） 通过一定的变形，利用两个重要的极限；
（4） 在某些特殊情况下，需要通过左右极限来判断函数在某点的极限；
（5） 运用等价无穷小或者无穷大的性质；
（6） 运用单调有界性质；
（7） 运用夹逼准则；
（8） 通过变量代换；
（9） 对于未定式，必要的话可以考虑运用罗必塔法则；
（10） 对于数列，可以先尝试计算出有限和，再取其极限；
（11） 运用级数收敛的必要条件；
（12） 通过运用定积分的定义来得到；
（13） 应用导数的定义；
（14） 运用微分中值定理。