第三章．导数与微分

上面我们给出了描述实数变量的一种特殊行为的概念—极限，这个概念是我们描述一大类刻画函数的局部性质的工具，本章正是应用这个工具得到了微积分的两个基本概念：导数与微分。

导数，导函数，导数的几何意义。

从直观的角度来讲，极限是我们观察运动细节的方式，运用这种方式，可以很自然地描述我们关于运动的细节的任何概念。关于运动变化发展的一个很基本的观念，就是变化率的观念。应该说这个观念的起源并不是以极限的观念为前提的，但是要清楚地表述变化率的概念，则非使用极限作为工具不可。

在实际问题当中，变化率的概念总是两个变量的比值，甚至一般是两个取确定大小的变量的比值，但这种作法从严格的意义上讲，是一种近似。

比方说变量x和y之间的具有函数关系y=f（x），那么y对于x的变化率就一般表述为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，分子与分母分别是两个相对应的变量的变化值。显然这个变化率的刻画运动真实情况的能力是由我们所取的 Δx 的大小决定的， Δx 越大，那么包含在 Δx 内部的变化情况就不能通过这个变化率表达出来。相反， Δx 越小，那么包含在 Δx 内部的变化情况就能更多地通过这个变化率表达出来。因此如果我们希望这个变化率的概念，能够尽量详细地刻画运动的实际情况，就必须尽可能地使得 Δx 尽量地小。显然这里就需要使用极限的概念，我们正是这样定义得到导数的概念的。

对于函数y=f（x）来说，在某点存在极限不一定要求函数在这点有定义，而如果我们要求刻画函数在这点附近的变化率这种性质，则显然应该要求函数在这点有定义。因此我们首先假设函数y=f（x）在点x_0的某个邻域内有定义。然后考虑自变量在这个邻域内的变化，已经相应的因变量的变化：

设x从x_0变化到 $x_0+\Delta x$ ，那么因变量就有相应的从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$ ，按照变化率的一般定义，就是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{，}$$

显然这个变量依赖于 Δx ，那么我们如何得到刻划函数在x_0处的变化率这种性质的变量呢？自然就是使用取极限的方法：

我们定义极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{。}$$

如果这个极限存在，就称为函数y=f（x）在x_0点的导数。这个导数仍然是刻划了函数在x_0这点变化率，因为我们已经应该理解到，极限是一个过程，而确定的极限值，则是度量这个过程的一个数值。

这样我们就得到了使用数值对函数在某一点的变化率性质的刻划，进一步，我们看到这个刻划函数在一点的性质，还可以看成是一个随着这个点的位置的变化而变化的新的函数，这个函数具有与所研究的函数相同的自变量，那么如果在上述的邻域内的每一点都存在，导数，或者说可以定义这样的导数的话，与这个邻域上定义的函数 y=f（x）相对应的新的函数是以每一点上的导数作为因变量的，这个函数称为导函数，在不至于混淆的情况下，也可以称为导数，写成 $y'=f'(x)$ 。

导数的概念可以用几何图形得到非常直观的表达，因为本来微积分的概念就有很强的几何直观性质，而我们学习微积分，从几何直观的角度来理解与把握抽象概念，则是一个不二法门，希望同学们认真对

待。

?

应用导数概念描述物理量。

导数概念具有很强的实际问题的背景，而我们在实际问题当中总是能够遇到大量的需要应用导数概念来加以刻划的概念，甚至可以说，导数的概念构成一种思路，当我们在处理真实世界的问题时，常常遵循这个思路来获得对于实际对象的性质的刻划。

前面我们已经讨论了导数的几何意义，其实完全可以反过来说，正是由于当初在几何学问题中，为了要描述斜率这个概念，才启发人们建立了抽象的一般的导数的概念。而在其他的领域，这种相互发明的情况是屡见不鲜的。

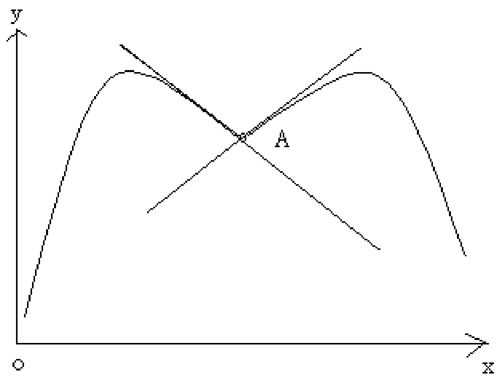
比方说在物理学领域，需要大量地应用导数的概念，来刻划属于变化率，增长率，强度，通量，流量等等一大类的物理量。例如速度，加速度，电流强度，热容，等等。而我们在实际问题当中，更是应该善于提取复杂现象当中所蕴涵的导数概念。

分段函数在分段点处的导数。

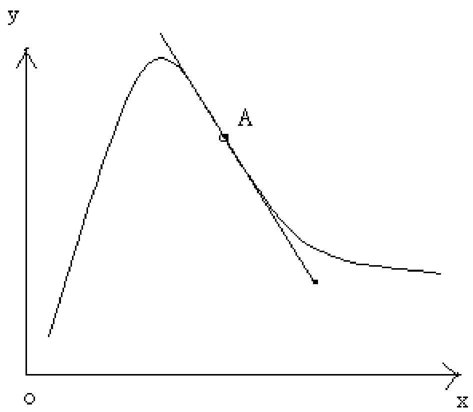
完全根据左右极限的概念，我们可以在上面的导数定义当中，把变化率的极限分成左右极限两种情况来考虑，这样就能够自然地得到左右导数的概念，不过，必须主要的是，任何时候，导数尽管作为一个极限，但导数的存在，并非只是要求这个相应极限的存在，更要求函数在相应的点有定义。

同左右极限主要应用于分段函数一样，左右极限也是主要用来分析分段函数在分段点处的性质。显然，如果分段函数在分段点处有定义，那么它在分段点处的导数会出现两种情况：一是在分段点处同时存在左右导数，但它们不相等；一是在分段点处的左右导数相等，这样这个函数在分段点处就存在导数，而不只是存在左右导数。

这两种情况如图所示，可以得到很好的表示：



图中函数在A点处，左右导数同时存在但不相等。



图中函数在A点处，左右导数同时存在并且相等。

这里我们实际上可以得到一个函数在某点存在导数的一个充要条件，即函数在该点同时存在左右导数，并且左右导数相等。

函数可导与连续的关系。

从上面的对于分段点的分析，就可以知道

（1）函数在某点处存在导数，则必定在该点处连续，首先因为存在导数，必定意味着同时存在左右导数，并且相等，这也就是说必定同时存在左右极限，同样相等，而且这个极限必定等于函数在这点的函数值。否则 Δy 就会总是大于某个确定的数值。

换一种说法，就是如果函数在邻域

$$0 \le |x - x_0| \le \Delta x$$

存在极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

则显然极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$ 也必定存在，并且只能是0，这正是函数在这点连续的定义。

（2）函数在某点处连续，则不一定在该点处存在导数，而尽管是可能同时存在左右极限的。正如上面的第一种分段函数的情况所给出的例子。

基本导数四则运算法则与求导公式。

由于导数实质上就是一个求极限的过程，因此完全来源于极限的四则运算法则，同样存在导数的四则运算法则，列出如下，不过还是希望同学们自己进行推导从而更好地掌握极限法则和导数法则。

（1） $y' = (c \cdot x)' = c \cdot x'$ ，其中c为任意常数。

（2） $y' = [au(x) + bv(x)]' = au'(x) + bv'(x)$，其中a和b是任意常数。

（3） $y' = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 。

（4） $y' = [\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ，（$v(x) \ne 0$）。

直接从导数的定义出发，也就是运用求极限的方式，我们就可以计算得到三种基本初等函数的导数的表达式，即常数函数，正弦函数，对数函数，因为这无非就是一个求极限的过程。从这三种基本初等函数的导数表达式，加上基本导数四则运算法则和函数之间本身的恒等变换关系，就可以得到所有初等函数的导数公式。

我们列出基本的求导公式如下，但是希望同学们能够自己动手，推导出这些基本求导公式来，而不是死记硬背，因为只有自己亲手推导出来的公式，才能真正熟练地，深刻地加以掌握，才能在实际应用当中加以灵活运用。

（1）	$y = c$	$y' = 0$
（2）	$y = x^a$	$y' = a\, x^{a-1}$
（3）		

	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$
(4)	$y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$
(5)	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
	$y=tgx$	$y'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
	$y=ctgx$	$y'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$y=\sec x$	$y'=(\frac{1}{\cos x})'=\sec x\cdot tgx$
	$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cdot ctgx$
(6)	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
	$y=arcctgx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

复合函数的求导法则。

由基本初等函数通过复合而得到复合函数，那么在这种复合过程当中，函数的导函数如何变化呢？这里有一个一般的对于复合函数的求导法则，就是所谓链式法则：

两个函数y=f（u），u=g（x）可以通过复合构成一个复合函数，其中g在x点处可导，f在相应的u=g（x）点处可导，那么复合得到的函数y=f[g（x）]在同样的x点处也可导，并且导数等于：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

这个定理直接应用导数的定义，通过求极限就可以得到。

这里是只有一个中间变量的情形，如果有多个中间变量，则表达式的形式是类似的：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdots\frac{dw}{dx}。$$

应用这个法则，就可以直接求出用基本初等函数通过有限的复合过程构造出来的复杂函数，而无论复合的层次有多少。

隐函数求导法。对数求导法。

我们已经讨论的函数都是采用所谓显函数的形式，就是函数表达式直接给出了因变量如何通过对自变量作什么样的运算而得到。还有一种表达函数的形式，就是所谓隐函数形式，这种函数表达形式给出的是自变量与因变量之间的关系，而没有直接给出由自变量得到因变量的表达式。这种形式的函数的导数的求法，一般就是应用链导法。

对隐函数应用链导法的核心思想就是引入中间变量，即对于一个同时包含了自变量与因变量的表达式，把包含了因变量的部分作为因变量自身的函数，从而总是能够对一个隐函数的表达式的两边同时关于本来的自变量求导。尽管在实际的运算过程中，我们并不一定需要特意地指出引入了什么样的中间变量。

在这里，初学者往往不能灵活地把任何一个包含变量的表达式的某个部分，看成是一个新的变量，这就反映了初学者还没有深刻地理解所谓变量的含义，这也正是我们在本课程开始的时候，着重强调变量这一类的基本概念的重要性的原因所在了。

下面我们会通过例子和练习来帮助同学们熟练掌握这个特别有用的求导法。

我们知道对于通过乘法，乘方，及其逆运算所组成的复杂形式的函数，可以通过取对数简化函数的形式，如果在这个基础上再运用隐函数的求导法，就能简化一大类的通过乘法，乘方，及其逆运算所组成的复杂形式的函数的求导运算，这就是对数求导法。

在运用对数求导法时，必须注意到，如果被取对数的项有可能取负值，则必须先对这项取绝对值，才能接着取对数。

反函数求导法。

应用链导法可以直接对一个函数的反函数求导。这里的关键是对每一个函数的自变量与因变量不能搞混淆了。任何就是注意反函数存在的条件。

设函数 $y_x=f(x), x_y=f^{-1}(y)$，则有 $y_x{}'=\dfrac{1}{x_y{}'}$。

参数式所确定的函数的求导法。

函数还有一种表示方法，就是通过引入参变量而得到参数方程所表示的函数。对参数方程求导，需要综合运用链导法和反函数求导法。

设参数方程为

$$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$$

那么我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$
$$=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

高阶导数。

既然导函数本身就是一个新的函数，那么应该同样可以再次对它关于自变量取导数，甚至多次地重复这种步骤，从而得到所谓高阶导数。我们在后面的学习当中，会遇到高阶导数极其重要的应用。高阶导数在实际问题当中也是极其有意义的，例如加速度的概念，就是基于位移对时间的二次导数，而二阶导数的几何意义也是极其鲜明的，即能反映曲线的凹向。

尽管求高阶导数只是上面所讨论的求导法的重复，并没有出现什么新的计算原理，不过掌握一些有用的公式，对于我们的计算还是能起到很大的简化作用，下面列出几个这样的公式：

(1) $(e^{x})^{(n)}=e^{x},(-\infty<x<+\infty)$

(2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{p}{2}),(-\infty<x<+\infty)$

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{p}{2}),(-\infty<x<+\infty)$

(4) $[\ln(1+x)]^{(n)}=-1^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}},(x>-1)$

(5) $(\frac{1}{x+a})^{(n)}=\frac{(-1)^{n}n!}{(x+a)^{n+1}}$

以及一个基本求导法则：

(6) $\frac{d^{2}y}{d\,x^{2}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^{3}}$

这几个公式是常用的基本公式，本身并不复杂，只有自己动手作推导，然后多加练习，就一定能够熟练运用。

进一步我们还可以自己推导出初等函数以及隐函数和参数式所确定的函数的高阶导数的求法。这里的关键是除了原始的自变量以外，其他的任何引入的参数或者中间变量，包括最终的因变量，都必须看成是另外的用来求导的变量的函数，随时清醒地意识到这点，可以使得我们能够有条不紊地一步一步运用基本求导法和基本公式解决任何的求导问题。因为从本质上来看，任何初等函数的导函数总还是初等函数，而且总能够通过固定的步骤求出来。这点和我们在后面要学习的积分法具有本质的不同。

微分。

我们知道导数的概念是用来研究函数在一点及其附近的局部性质的精确工具，而对于函数在某点附近的性质还可以应用另一种方法来研究，就是通过最为简单的线性函数来逼近，这就是微分的方法。

所谓微分仍然是导数概念的一种应用，应用导数的概念，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

我们有如下的所谓增量公式：

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+a(\Delta x)\Delta x$$

这里 $a(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$ 是一个 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量。因此我们可以取

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x,$$

这个近似等式在点x的附近是随着 Δx 越小而越精确的，由于函数在某点的导数是一个常数，因此上面的表达式是一个线性函数，这里的实质就是在某点的附近，用一个线性函数替代原来一般是比较复杂一些的函数，从而在这点的附近能够应用简单的方式研究这个函数的性质。一般地，我们就可以定义一个新的概念：

$$dy = f'(x)\Delta x$$

就称为函数在x点处的微分。

从微分的概念，我们还可以更进一步地理解导数的概念：

我们看上面的表达式究竟是什么样的意思：就是任何一个函数，因变量在某点的微分就是函数在这点的导数和自变量在这点附近的一个足够小的增量的乘积，那么我们同样可以定义这个函数里的自变量的微分。怎么定义呢？就是在这个函数里，把自变量看成另一个函数的因变量，从而使得这个函数成为一个具有新的变量的复合函数，我们可以这样定义这个函数，即g（x）=x，这样就在形式上没有改变原来的函数，而实质上应该说我们对这个函数的看法有了改变，那么函数g的微分有时什么呢？可以得到就是：

$$dx=\Delta x$$

这样我们就从微分的角度得到了导数记号的新的意义，即

$$dy = f'(x)dx,$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)。$$

回顾一下我们以前对导数的定义，是来自两个增量的比值的极限，作为一个极限，写成比值的形式，却还是一个整体的意思，现在我们看到，这种比值的形式还是可以赋予比值的意义的。这样就使得我们可以合理地对导数的这种形式应用除法的运算法则了。例如在我们应用链导法时，已经不自觉使用了的一样。

微分的四则运算法则。微分形式不变性。

进一步利用微分与导数的这种比值形式的关系，就可以直截了当地从导数的运算法则得到相应的微分的运算法则，即直接在表达导数运算法则的恒等式的两边乘dx即可，因为对于导数的这种作为两个微分的比值的看法允许这么作：

(1) $dy=d(c\cdot x)=c\cdot dx$，其中c为任意常数。

(2) $dy=d[au(x)+bv(x)]=adu(x)+bdv(x)$，其中a和b是任意常数。

(3) $dy=d[u(x)v(x)]=du(x)v(x)+u(x)dv(x)$。

(4) $dy = d[\frac{u(x)}{v(x)}] = \frac{du(x)v(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$，（$v(x) \neq 0$）。

对于函数的自变量，我们知道还可以更进一步地看成是另一个新的变量的函数，这样就使得原来的函数转变为一个复合函数，这是我们构造函数或者说理解函数结构的常用方法。那么因变量的微分是否与自变量究竟是最终的自变量，还是仅仅只是一个中间变量有关呢？这里存在一个微分的基本性质，就是说微分的形式是与变量在函数里的地位没有关系的，这就是所谓微分的形式不变性。

我们可以通过运用两个不同的途径来求一个变量的微分而得到微分不变性的一个说明。一是对于一个函数直接运用微分的定义；二是把这个函数的自变量看成另一个新的变量的因变量，从而对于复合函数运用链导法而得到原来变量的微分的新的表示形式，最终可以发现者两个结果是一样的。即对于函数 $y = f(x)$，直接根据微分的定义，我们可以得到y的微分表示为 $dy = f'(x)dx$，而如果我们任意引入一个新的函数 $x = g(u)$，这样就使得变量y成为了一个新的复合函数的因变量：$y = f[g(u)]$，对于这个复合函数，我们仍然可以直接应用微分的定义，得到变量y的微分的表达式：

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du,$$

注意，这里的 $\frac{dy}{du}$ 是从导数的本来定义来理解的，暂时不能看成是两个变量的微分的比值。

另外，变量y的这个复合函数的导数可以通过链导法表示如下：

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = f'(x)g'(u),$$

把这个导数的表达式代入上面的变量y的微分的表达式，可以得到

$$dy = \frac{dy}{du} du = f'(x)g'(u)du,$$

我们可以看到，其中包含了函数g的或者说变量x的微分的表达式，即 $dx = g'(u)du$，代入，我们就得到了和直接应用微分定义所得到的，用变量x表达的变量y的微分一样的形式：$dy = f'(x)dx$。这就是所谓的微分形式不变性。

微分不变性最为重要的意义就是说明了可以对于任意的变量取微分，而无论这个变量在还是中所处的地位如何。

进一步，对于引入了中间变量的链导法，反函数求导法，参数方程的求导法，我们都可以在非常简单的意义上来加以理解，即总是可以把导数看成是两个不同变量的微分的比值，从而可以对于导数与微分应用除法的运算法则。这就极大地简化了我们有关导数与微分的运算，加深了我们对于导数与微分之间的关系的理解。

基本微分公式。

基于基本函数的导数公式和微分形式的不变性，我们可以直接得到基本函数的微分公式，实际上，也就是把导数看成两个微分量的比值，然后在导数公式的恒等式两边乘dx即可。我们列出如下，以便记忆：

(1)	$y = c$	$dy = 0$

(2)	$y = x^{a}$	$dy = a\,x^{a-1} \cdot dx$
(3)	$y = a^{x}$	$dy = a^{x} \ln a \cdot dx$
(4)	$y = \log_a x$	$dy = \dfrac{\log_a e}{x} dx = \dfrac{1}{x \ln a} dx$
(5)	$y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
	$y = tgx$	$dy = \sec^2 x \cdot dx = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$
	$y = ctgx$	$dy = -\csc^2 x \cdot dx = -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx$
	$y = \sec x$	$dy = d(\dfrac{1}{\cos x}) = \sec x \cdot tgx \cdot dx$
	$y = \csc x$	$dy = -\csc x \cdot ctgx \cdot dx$
(6)	$y = \arcsin x$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	$y = \arccos x$	$dy = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	$y = arctgx$	$dy = \dfrac{1}{1+x^2} dx$
	$y = arcctgx$	$dy = -\dfrac{1}{1+x^2} dx$

考虑到我们前面讨论过的一个结论，即在函数里面，对于任何变量取微分总是有意义的，那么我们对于上面的微分公式，可以有另一种观点，即把dx前面的表达式部分拿到微分号后面，就得到了变量y所代表的函数。这种观点就是我们在后面要研究的积分的概念。