第四章。微分学应用

对于变量取实数的函数，我们已经建立了导数与微分的概念，可以应用于研究实变量函数的局部性质。本章讨论的就是如何应用这两个概念来研究实变量函数的性质。

函数的极值点和极值的概念。

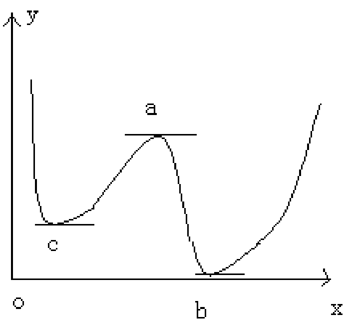
从直观的角度来理解这两个概念，还是比较容易的，不过初学者容易把握不到要点的地方是这两个概念完全是局部性质的概念，即只是在一点的附近，或者是在一点的某个领域内有效，而不管这个邻域是多么的小。因此函数的极值点更为严谨地说，应该是函数的局部极值点。

仔细分析一下下面的定义：

如果函数在某点的邻域内都有定义，而函数在这个邻域内所有点的函数值总是小于或等于函数在这点的函数值，那么这点就是函数在这个邻域内的极大值点，函数在这点的函数值就是函数在这个邻域内的极大值；反过来，就分别称为函数在这个邻域内的极小值点和极小值。

可以清楚地看到，极值点和极值都只是对于一个邻域而言的，任何时候不首先给出这个邻域，讨论极值点和极值都是没有意义的。

从几何直观的角度来讲，我们一般地可以通过图形来表示这个概念，比方说如图所示：



我们说图中函数在a的取值为极大值，同时还必须说明这个极大值具有存在意义的邻域，而这个邻域的大小显然有时候是无法通过图形表示的。

那么我们是否还有更为方便的描述方法呢？根据定义来通过一一比较而得到极值，显然是不可行的，我们希望存在更为直接的描述，可以应用来作为实际可行的判据，这就需要导数的概念：

函数在一点的某个邻域里是以这点作为极值点的，那么函数在这点的导数如果存在，则必定是等于0。

这是极值点的一个特征，但是反过来，如果我们要判断一点是否极值点，并不是完全依赖这个特征，因为这个定理反过来说并不是正确的，即导数等于0的点，并不一定就是极值点。

这样我们就必须对于导数为0的点给出专门的称呼，使得我们在实际的寻找极值点的过程中，是首先找到导数为0 的点，然后再在这种点中间分辨出极值点出来。我们称导数为0的点为驻点或者说平稳点。那么上面的定理就可以这么说：

函数的极值点首先必须是函数的驻点。

我们还可以进一步扩大这种包含极值点的范围，比方说，我们定义导数为0和根本就不存在导数的点，或者说不可微的点为临界点，这样我们就有了如下的包含关系：

临界点 $\supset$ 驻点 $\supset$ 极值点。

函数的最大值和最小值的概念。

所谓最值点，顾名思义，就是函数在一个区间内取值最大或最小的点。

相对于函数的极值的概念的局部性，函数的最值则是一种整体的概念，即是在一个固定的区间内有意

义的概念，这是和极值概念绝然不同的所在。那么我们如何通过运用导数与微分这样的反映局部性质的概念来研究最值呢？显然我们只能给出一个最值的必要条件，就是一个最值首先必须是一个极值。这也就是说，最值是包含在极值之中的，至于通过极值来找到最值，最终还是必须依靠对可能有的不同极值进行比较，显然，如果极值的数目是有限的，并且不是很多，那么就比较容易得到最值，如果极值是无穷多的，或者是数目极大的，就面临得到最值的困难，因此实际上，通过导数的方法来求最值，并没有最终地解决最终问题，而只是在一定的条件下可以得到解决。

罗尔定理。

导数等于0的点，在几何上具有明显的特征，而这个特征是来源于函数在某个固定区间上的整体特征，这个定理正是揭示了这点：

（1）函数y=f（x）在闭区间[a，b]上连续；

（2）在开区间（a，b）上可导；

（3）f（a）=f（b）；

则在开区间（a，b）上必定存在一点c，使得函数在这点的导数为0。

这个定理可以直接从连续函数在闭区间上的最值存在性得到，即不是端点的最值点，必定是极值点，而极值点的导数必定为0。

这是一个存在性定理，即这个定理只是给出某点的存在，而不给出如何求出这点。

注意这里的三个条件是却一不可的。条件（1）要求在闭区间上连续，是因为如果函数在端点上不连续，那么条件（3）就变成没有意义的了，也就是说，条件（3）不能反映任何函数在这个区间上的性质了。

条件（2）要求函数在开区间上可导，而不一定要求在两个端点上可导，是因为结论中的c点必定是内点，因此并不要求函数在端点上存在导数。

拉格朗日中值定理。

可以把上面的定理进行一般的推广，即前面两个条件保持不变，而作为特殊条件的条件（3）可以去掉，从而得到：

（1）函数y=f（x）在闭区间[a，b]上连续；

（2）在开区间（a，b）上可导；

则在开区间（a，b）上必定存在一点c，使得函数在这点的导数为：

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

。

显然罗尔定理是这个定理的特殊情形。

这个定理的几何意义同样是相当鲜明的，就是对于在一个闭区间上连续的函数，也就是一段连续闭曲线，无论其端点的位置位置如何，曲线内部总是存在一点，这点的切线与两个端点的连线平行。直观地推导，就是取两个端点的连线，作平行的移动，则必定至少会存在一个时刻，这时平行移动的直线与曲线相切。

严谨的证明可以有多种方法，例如可以通过应用罗尔定理。

同样必须注意这里和上面的定理具有同样的条件。

柯西中值定理。

如果是两个函数在同一个闭区间上同时满足上面的两个条件，那么就有下面的定理：

设函数y=f（x）和y=g（x）同时满足下面的条件：

（1）在闭区间[a，b]上连续；

（2）在开区间（a，b）上可导；

（3）两个函数在开区间上不同时为0；

则在开区间（a，b）上必定存在一点c，使得两个函数在这点的导数满足：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

显然这个表达式还要求 $g(b)-g(a)\neq 0$ 。

注意这个定理里的条件（3）。

这个定理同样可以应用罗尔定理，通过构造辅助函数来证明。而如果取g（x）=x，则这个定理就是拉格朗日中值定理。因此这个中值定理可以看成是这三个中值定理当中最一般的定理。

罗必达法则。

柯西中值定理的一个极其重要的应用就是可以用来计算未定型的极限。仔细观察柯西中值定理里的表达式的形式，可以看到两个函数式的比值，在移动条件下可以化成者两个函数的导数的比值，这样就有可能使得作为未定型的分式的分子与分母所表示的函数，通过求导，而得到非未定型。这是一个基本的思路，我们有下面的定理：

（1）两个函数f（x）和g（x）在开区间（a，b）可微，并且在这个开区间上，g（x）的导数不等于0；

（2）存在极限

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$，

其中A为一个有限的常数。

则在以下情况下：

（3） $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$

或者

（3`） $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$

那么就有

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$ 。

反过来在区间的另一个端点也存在相类似的结果。

这个定理就称为罗必达法则。能有效地应用于未定型的极限计算。

未定型的极限。

罗必达法则可以运用于7种未定型的极限计算，而最为基本的未定型只有两种：$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$。其他的未定型都可以化成者两种形式：

（1）。 $0\cdot\infty$ 型

通过恒等式

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$，

从而得到$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$这两种基本形式。

（2） $\infty-\infty$ 型。

通过恒等式

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{g(x)}},$$

从而得到$\frac{0}{0}$型。

（3） $0^0,\infty^0$，1^∞型。

通过恒等式

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}$$
$$=e^{g(x)\ln f(x)},$$

从而得到$0\cdot\infty$型，再进一步化成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$这两种基本形式。

对于两种基本形式的未定型，直接应用罗必达法即可，即表示为

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$ 。

显然这时的条件为$f'(x),g'(x)$都存在，并且$g'(x)\neq 0$。还有一个不是很明显，因此初学者常常犯错误的地方，就是要求f（x）和g（x）同时以0或者∞为极限。在实际作题时，一定要注意随时验证这三个条件，否则必定会犯错误。

在实际的作题当中，可能应用一次罗必达法则还是不够的，而需要应用多次，用更高阶的导数来进行比较，才能得到一个确定的极限值。

我们再仔细考虑一下罗必达法则里的等式的意义，可以看到，这个法则并不只是表示了一种计算方法，更为重要的是它揭示了一个思想，即两个同时增大或者同时减小的函数，它们相对的变化快慢，可以通过比较它们的一阶甚至更高阶导数而得到。

在这个意义上，我们看两个通过运用罗必达法则而得到的重要极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^a}=0$；

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}=0$。

从这两个极限，我可以得到什么样的结论呢？

（1） 当x无限增大时，x的对数函数的增长比x的任何正乘幂的增长要慢；

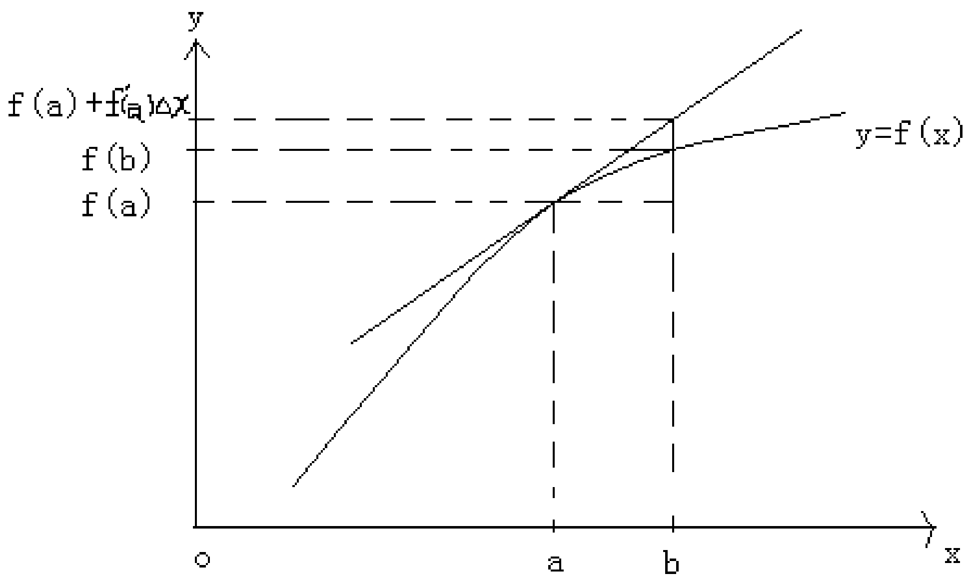
（2） 当x无限增大时，x的任何正乘幂的增长比x的指数函数的增长要慢。

这是关于这三个函数的重要结论，一定要记住。

应用微分作近似计算。

微分的思想就是一个线性近似的观念，利用几何的语言就是在函数曲线的局部，用直线代替曲线，而线性函数总是比较容易进行数值计算的，因此就可以把线性函数的数值计算结果作为本来函数的数值近似值，这就是运用微分方法进行近似计算的基本思想。

通过对如下的微分概念的图形表示，可以更进一步理解这种近似的含义。



从图中可以看到，随着b点趋向于a点，$f'(a)\Delta x$ 的值也趋向于f（b）-f（a）的值，它们的差值是a与b之间差值的高阶无穷小，因此对于任意函数在某点的取值，我们总是可以在函数的这点的的附近找到一个比较容易计算的点，再从这点出发，在通过这点的函数曲线的切线上面计算所需要求的点的函数值的近似值，显然我们选取的计算点与本来要求计算的点的差距越小，则计算的近似程度越高。

泰勒定理及其应用。

上面利用微分所作的线性近似，毕竟还是相当粗略的，因为所谓线性近似，就是用直线代替函数在某点附近的曲线，而毕竟直线与函数本身所代表的曲线，还是相差不少的，如果要更进一步进行精细的近似计算，则需要更为逼近函数本来的曲线的相对简单函数的曲线，利用下面的更为一般的泰勒定理，我们就可以通过构造比较简单的，容易进行数值计算的函数，来获得比线性函数更好的近似性质。

首先我们构造这样的简单函数形式，即所谓泰勒多项式：

如果函数y=f（x）在点a处具有直到n阶导数，那么多项式

$$Q(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

称为函数y=f（x）在x=a处的n阶泰勒多项式。

实际上，泰勒多项式就给出了函数在a点附近某点b的函数值的近似计算法，我们有下面的定理：

（1） 函数y=f（x）在开区间（a，b）上存在直到（n+1）阶的导数；

（2） 函数本身和它的直到n阶的导函数在闭区间[a，b]上连续；

那么有下面的恒等式：

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},c\in(a,b)$$ ，或者

$$f(a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(a-b)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1},c\in(a,b)$$

这是一个精确成立的恒等式，因此不仅给出了近似计算法，也给出了误差估计。

一般地，除了分析函数增量的近似以外，利用泰勒多项式，还可以给出函数在 $a\to b$ 的近似表示如下：

如果函数f在点a具有连续的n阶导数，则可以把函数表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o[(x-a)^n],$$

这就是函数f在点a处的n阶泰勒公式。

这两个定理是分析一般函数最为有力的工具之一，它不仅是表现在进行近似计算方面，它同样给出了函数的在某点的性态。

实际上，前面的线性近似是包含在泰勒近似当中的，即对函数进行1次逼近就是线性近似。

函数的单调区间及其增减性。函数的局部极值，最大值和最小值以及应用问题。

由于导数概念具有鲜明的几何意义，因此这个概念可以运用来分析函数图形的几何特征下面主要的内容，就是如何通过函数的导函数，来分析函数的几个方面的几何特征。

直接应用拉格朗日中值定理就可以得到导数表征函数单调性质的定理：

如果函数f（x）在闭区间[a，b]上面连续，在开区间（a，b）上面可导，那么：

（1） 在开区间（a，b）上面 $f'(x)>0$，则函数f（x）在[a，b]上面递增；

（2） 在开区间（a，b）上面 $f'(x)<0$，则函数f（x）在[a，b]上面递减；

（3） 开区间（a，b）上面 $f'(x)=0$，则函数f（x）在[a，b]上面为常数。

注意，在上面的定理当中，f（x）在闭区间[a，b]上面连续，在开区间（a，b）上面可导是必要条件，而导数的正负则是充分条件而不是必要条件。

前面我们已经讨论了局部极值和区间最值的概念，结合单调性的讨论，我们进一步可以得到以下非常具有几何直观意义的几个定理：

（1）首先我们定义一点的左邻域为该点的去心邻域的所有小于该点的部分，而右邻域则是所有该点的所有大于该点的部分，那么如果一个函数在某点的某个邻域内可导，并且函数在该点的导数为0，则如果函数在该点的左邻域的导数小于0，同时在该点的右邻域大于0，那么该点为函数的局部极小点；反过来，如果函数在该点的左邻域的导数大于0，同时在该点的右邻域小于0，那么该点为函数的局部极大点；而如果函数在该点的某个邻域内，函数的导数的符号保持不变，则该点不是函数的极值点。

（2）如果某个连续函数在某区间上除有限个点以外都具有连续的非零导数，那么当函数在这个区间只有唯一的一个极值点时，这个极值点就是函数在这个区间上的最值点。

（3）如果某个函数在某个驻点具有2阶连续导数，那么当函数在该点的2阶导数大于0时，该点就是函数的局部极小点；当函数在该点的2阶导数小于0时，该点就是函数的局部极大点。

曲线的凹向区间和拐点。

函数的几何图形特征除了单调性与极值，最值以外，还有一个凹向与拐点的问题，不过这同样是非常具有几何直观基础的问题，应该可以很容易地加以掌握，而掌握这些几何特征与解析表示的关系的关键，就是这些解析条件表达的条件。

首先我们解析地定义什么是凹向，也就是什么是凸函数。

（1）如果函数f（x）是区间[a，b]上的凸函数，则对于任意不同的属于这个区间的两点c和d，有下面

的不等式成立：

$$f(d)-f(c)\geq f'(c)(d-c)$$ 。

（2）如果函数f（x）是区间[a，b]上的凸函数，则对于任意不同的属于这个区间的两点c和d，以及任意大于0，小于1的数k，有下面的不等式成立：

$$f[kc+(1-k)d]\leq kf(c)+(1-k)f(d)$$ 。

特别地，如果我们取k=1/2，那么上面的不等式就变成了

$$f(\frac{c+d}{2})\leq\frac{1}{2}[f(c)+f(d)]$$ 。

这个不等式更为常用。

进一步，如果函数f（x）是区间[a，b]上的凸函数，则在这个区间上-f（x）被称为凹函数。而如果函数是某个闭区间上的2阶可微凹函数，则函数在这个区间的2阶导数小于等于0，其中至多只是在有限个点成立等号。

然后我们定义什么是函数图形上的拐点：

如果连续函数在某点a附近发生凸性的变化，则称点（a，f（a））为函数的拐点。

通过上面的这些几何特征的定义，以及判别条件，我们就可以做到画出一般函数的草图，这是我们应该掌握的一个重要技能，因为给函数画出草图往往是我们直观了解这个函数的关键前提，特别是如果这个函数比较复杂，即使是经过解析方面的分析，仍然是表示为非常复杂的解析表达式，这种情况下，只有几何方面的特征能够给人足够清晰的印象。

?

曲线的水平渐近线，垂直渐近线以及斜渐近线。

所谓渐近线充分反映了函数曲线在向无限远处延伸时的渐近近似性质，它的含义就是，存在一条直线，当函数的自变量趋向于无穷时，函数上的点到这条直线的距离趋向于0，如果这条直线是水平的，则称为水平渐近线，如果这条直线是垂直的则称为垂直渐近线，如果这条直线是倾斜的，则称为斜渐近线。

根据上面的定义，我们就可以这样来理解函数的渐近线，设函数y=f（x）具有渐近线y=ax+b，那么我们可以得到：

当 $x\to\infty$ 时， $f(x)\to ax+b+o(1)$ ，

其中 $o(1)$ 表示一个无穷小。

这样我们就可以得到一个近似表达式

$$f(x)\approx ax+b$$ 。

这就充分表达了我们研究渐近线的最终目的之一，就是希望在x充分大时，应用这个近似表达式进行近似计算，而实际上这个表达式同时也提供了在实际问题当中求渐近线的方法。

?

函数作图。

运用我们以及学习的导数概念，函数作图的一般步骤如下：

（1）? 求出函数的定义域和值域。

（2）? 确定与函数定义域密切相关的几何特征：奇偶性和周期性。

（3）? 求出函数的1阶导数与2阶导数。

（4）? 在函数定义域内求出方程 $f'(x)=0,\ f''(x)=0$ 的根，求出使得函数的1阶导数与2阶导数不存在的点，把所有这些点作为函数定义域的分界点，从而把函数的定义域分为一些部分区

间。

（5）？ 在每一个这样的部分区间内，确定函数的1阶导数与2阶导数的符号，从而可以得到函数的单调区间，凸凹区间，局部极值点，拐点。

（6）？ 利用求极限的方法，求出函数图形的各种可能的渐近线。

（7）？ 给出极值点和拐点后，根据具体情况，有可能需要在各个部分区间再补充几个点，根据上面所揭示的函数性质，就可以联结这些点而得到函数的草图。

希望同学们一定要重视函数的作图，养成在研究任何函数的性质之前，总是尝试作出草图，在这样的几何直观指导之下，一定能够更为深刻地理解函数的解析性质。

曲率和曲率半径的概念以及曲率和曲率半径的计算。弧微分及其计算。

直观地说，曲率就是表征曲线的弯曲程度。对于一段曲线来说，它的定义就是这段曲线的切线的角度的变化量除以这段曲线的长度，这个曲率称为这段曲线的平均曲率，而对于曲线上面的任意一点来说，这点的曲率，就是这点的某个邻域的平均曲率在邻域长度趋向于0时的极限，也就是

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta j}{\Delta s}\right|$$。

可以看到这个定义从数学意义来看，就是一种导数。因此关于曲线的曲率的研究实际上就是导数概念的一个应用。

还可以看到计算曲率，就意味着计算曲线弧长的微分与切线偏转角度的微分，因此有必要引入弧微分的概念。

设一段曲线由如下参数方程描述：

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}，\ (a\le t\le b)$$。

其中函数f，g都存在连续的1阶导数和2阶导数，并且$[f'(t)]^2+[g(t)]^2\neq 0$，那么定义这段曲线的弧微分为

$$ds=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\,dt$$。

利用弧微分的定义，我们可以得到一般曲线的曲率的计算公式：

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$$

根据曲率的这个计算公式以及上面的弧微分的计算公式，我们可以计算一种特殊的曲线的平均曲率，即圆的平均曲率，可以得到圆的平均曲率实际上是一个常数，也就是说，圆周函数的任意点的曲率都是相同的，并且等于圆周的半径的倒数，这就启发我们对于一般的曲线，都可以定义它的任意一点的曲率的倒数称为曲线在这点的曲率半径。

显然，这个定义是具有非常直观的意义的，因为根据上面的曲率的一般计算公式，可以看到一般曲线在某点的曲率完全由曲线在该点的1阶导数和2阶导数决定，因此如果过曲线上任意一点作一个圆与曲线相切，它的半径就是该点的曲率半径，那么曲线在该点的只与该点处的1阶导数和2阶导数有关的性质，就完全可以通过研究通过该点的这个圆而得到，因为它们具有同样的凸性和曲率，以及共同的切线。我们称这个圆为曲线在该点的曲率圆，而这个圆的圆心则称为曲线在该点的曲率中心。

求方程近似解的二分法和切线法。

计算方程的近似根的所谓二分法直接来源于连续函数在闭区间上的一个性质，即零值定理。因为我们

知道零值定理实际上就是一个方程的根的存在性定理。只要通过零值定理判断这个方程在给定的闭区间存在至少一个根，就可以通过不断地把这个闭区间分成两半，每次都可以判断方程的根是存在于哪个闭区间，从而逐渐地逼近方程的根的位置。

当然二分法的效率是很低的，下面我们讨论另一个效率更高的方程根的近似计算法，即切线法，或者称为牛顿法。

这种方法从几何直观的角度来看，是非常容易理解的，不过我们希望同学们能够基于几何意义，自己能够推导出具体的解析计算公式，这也是一种非常好的训练。

直接计算切线法所引入的切线的斜率，即

$$f'(x_n)=\frac{f(x_n)}{x_n-x_{n+1}},$$

就可以得到近似根的迭代公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

这个公式称为牛顿公式。

由这个公式所产生的数列的极限，就是我们所希望得到的方程的根，我们有个一般的定理保证了这点：

（1） 设函数f（x）在闭区间[a，b]上有定义，$f''(x)$存在并且连续；

（2） f（a）和f（b）异号；

（3） 对于[a，b]内所有的x，函数的导数都不等于0；

（4） 在[a，b]内，函数的2阶导数不变号；

（5） 当$|f'(a)|\le|f'(b)|$时，有$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\le b-a$，而当$|f'(a)|\ge|f'(b)|$时，有$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\le b-a$；

那么对于[a，b]内的任意初值x_0，通过牛顿公式而产生的数列必定收敛于方程f（x）=0的根。

不过这里需要注意的是初值的选择还是非常重要的，从几何的角度来理解，就可以知道，在某些情况下，初值选择不当的话，甚至有可能使得这个求近似根的方法无效，这需要根据具体情况来仔细考虑。

二，答疑解难。

1．临界点 ⊃ 驻点 ⊃ 极值点 ⊃ 最值点，对吗？

[答]：不对。

最值点不属于极值点，实际上应用导数概念刻划的极值点概念并不能完全刻划最值点，本质上这两个概念是不同性质的，一个属于曲线的局部性质，一个属于曲线的整体性质。

要求得最值点，还需要经过一个比较过程，还必须考虑曲线的端点。

2．运用罗必达法则计算未定型的极限时，如果得到结果是极限不存在，那么是否就是一定不存在极限？

[答]：不对。除非我们全面地根据罗必达法则的条件对极限表达式进行了验证，否则，应用罗必达法则就不一定是正确的。

特别是如果 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不是无穷大，而同时 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 也不存在，这时只能说罗必达法则不能应用于这个问题，而只能使用别的方法进行计算。