第五章.一元函数积分法及其应用

原函数和不定积分。不定积分的性质。

前面我们主要是讨论导函数的概念，即对于一个连续函数，求出它的导函数，就意味着描述了这个连续函数在每一点的变化率随着自变量而变化的规律。反过来，这个规律是不是只是描述了一个特定函数的变化率呢？根据变化率的定义，显然所有与原来的函数在Y轴方向上平行的函数都具有相同的变化率变化规律，这实际上就意味着，一个导函数同时描述了一束沿着Y轴方向相互平行的函数的变化率的变化规律。这一束函数的解析式相差一个常数。我们也可以这么说，即相差任意一个常数的函数具有相同的导函数。

这样我们就得到了一个对应关系，即对于在区间I上连续的一束函数F（x）+c（c为任意常数），对应着一个唯一的函数f（x），满足

$$\frac{d(F(x)+c)}{dx}=f(x)$$，或

$$d(F(x)+c)=f(x)dx$$。

换一种观念，上面的过程也可以看成是一种对于函数F（x）的运算，即微分的运算，得到函数F（x）+c的微分，那么反过来，也存在一个作用于函数f（x）的逆运算过程，得到函数F（x）+c本身，这种逆运算就是积分，或者说不定积分，写成

$$\int d(F(x)+c)=\int f(x)dx=F(x)+c$$。

这里，相对地，我们就把被积函数f（x）称为原函数F（x）+c的导函数，而把原函数F（x）+c称为被积函数f（x）的不定积分。

因此我们可以把不定积分理解为微分的逆运算，只不过是一种一对多的关系，即一个被积函数对应于无穷多个相差为任意常数的原函数。

在这种意义之下，我们就可以很容易地理解下面的表达式：

$$\int F'(x)dx=F(x)+c$$；

$$d(\int f(x)dx)=f(x)dx$$；

$$(\int f(x)dx)'=f(x)$$。

希望同学们多加体会这些表面看来很绕的表达式，深切体会不定积分的逆运算含义。

这里特别需要注意的是在这两种互为逆运算的运算作用之下，函数性态的变化，下面是几点注意事项：

（1） 由于我们主要是讨论初等函数，而初等函数在其定义域上总是连续的，这里特别需要记住的是，连续不是可导或可微的充分条件，而只是必要条件，可导的条件更强，即还要求函数在定义域上每一点处的左右导数都存在，并且相等。因此对于分段函数，在分段点处就必须检验这个条件，对于某些特殊的函数，在某些特定的点，也会出现左右导数或者缺失，或者不相等的情况，这些都需要仔细加以验证。

（2） 进一步，可导与可微仍然还存在一个差别，即函数在某点可导，导数可以是无穷，这种情况下，就不是可微的，即函数在一点及其邻域可微的充要条件是函数在这点存在有限的导数。

（3） 另外一个连续函数的导函数未必是连续的，而对非连续函数作积分运算则是比较复杂的，本课程不作系统讨论。

基本积分公式和基本积分法则。

由于不定积分实际上就是微分运算的逆运算，因此把基本微分公式反过来写，就得到了相应的基本积分公式，我们列出如下：

(1)	$y=k$	$\int kdx=kx+C$，k为常数。
(2)	$y=x^a$	$\int x^a\cdot dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C,a\neq-1$
(3)	$y=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$
(4)	$y=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$
(5)	$y=\sin x$	$\int \sin xdx=-\cos x+C$
	$y=\cos x$	$\int \cos xdx=\sin x+C$
	$y=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\cdot dx=tgx+C$
	$y=\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\cdot dx=-ctgx+C$
	$y=\sec x\cdot tgx$	$\int \sec x\cdot tgx\cdot dx=\sec x+C$
	$y=\csc x\cdot ctgx$	$\int \csc x\cdot ctgx\cdot dx=-\csc x+C$
(6)	$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$
	$y=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=arctgx+C$

而类似地，从微分的运算性质，可以得到相应的积分的运算性质，其中最为简单的就是积分运算的线性性质：

$\int[af(x)+bg(x)]dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$，

实际上对于任意有限个可积函数的线性组合，这个积分运算性质都是成立的。

其他对应的而又比较复杂的积分法则在下面分节再讨论。

换元法。

相应于求导法则当中的链导法，积分法就是所谓换元法。

我们知道，求导法当中的链导法的核心思想就是变量替换，同样，换元法的核心思想也是变量替换。实际上，我们应该已经能够体会到，变量替换在函数的分析当中，本来就具有相当基本的重要性，而在积分运算当中，我们会看到同样具有基本的重要性。

我们在进行函数的复合时，已经可以体会到变量替换具有两种方式，或者说两个方向，一是减少复合

的层次，二是增加复合的层次。

所谓换元法，也就具有相应的两种途径，一是把被积函数的自变量看成新引入的一个函数的自变量，而这个新引入函数的因变量则可以凑成原来被积函数的自变量，这样被积函数实际上就减少了复合的层次，而变得比原来的形式要简单；

二是把被积函数的自变量看成一个新引入变量的函数，在被积函数当中代入这个函数，这样就改变了被积函数的自变量，并且使得被积函数增加了复合层次，表面看来是增加了被积函数的复杂性，但我们的目的是使得被积函数比较容易进行积分。

形式地说，就是假设被积函数为f（x），它的不定积分$\int f(x)dx$无法直接应用已知的积分公式来求出，那么我们可以尝试进行积分变量的替换，使得通过变量替换而得到一个更容易进行积分运算的积分式$\int g(u)du$，其中变量u和变量x的关系可以是两种形式，即$u = j(x)$和$x = f(u)$，前面的形式是在被积函数中凑出新的函数来，后面的形式则是引入额外的新函数。

这两个途径就分别称为换元法一和换元法二，下面我们更仔细地分别进行讨论。

（1）换元法一。

设我们是取$u = j(x)$，那么就有

$\int f(x)dx = [\int g(u)du]_{u=j(x)}$，

代入$u = j(x)$就有

$\int g(u)du = \int g(j(x))dj(x)$，

上面等式右边出现了u的微分，我们有

$dj(x) = j'(x)dx$，

代入，我们的最终目的就出现了，即要求

$\int f(x)dx = \int g(j(x))j'(x)dx$，

也就是要求通过适当地取$u = j(x)$，使得

$f(x) = g(j(x))j'(x)$。

反过来，我们可以这么说，即把被积函数f（x）凑成上面的形式，从而通过计算比较容易的$\int g(u)du$而得到比较困难的$\int f(x)dx$。

可以看出，这里的关键，就是把原来的被积函数凑出两个因式来，其中一个是某个新函数的导函数，而另一个因式则可以看成是以这个新函数为自变量的形式，最终经过这个换元过程是否达到了目的，就要看是否确实计算$\int g(u)du$比计算$\int f(x)dx$要容易，如果没有达到这个目的，则说明应用换元法无效，必须考虑使用别的方法。至于如何选取适当的$u = j(x)$，并没有一定的规律，主要是依靠我们通过练习来获得经验，增强观察力。

而应用换元法一的条件是其中所涉及到的$u = j(x)$，$j'(x), g(u)$都必须是连续的。

最后需要注意的一点是，必须把变量x通过 $u=j(x)$ 代入积分结果，从而得到我们真正要求得到的积分 。

（2）换元法二。

如果我们是取 $x=f(u)$，我们就可以进行下面的推导：

$$\int f(x)dx=\int f(f(u))dx$$
$$=[\int f(f(u))\cdot\frac{dx}{du}\cdot du]_{u=f^{-1}(x)}$$
$$=[\int f(f(u))\cdot f'(u)\cdot du]_{u=f^{-1}(x)}$$

这整个推导的最终目的，就是希望新形式的被积函数 $f(f(u))\cdot f'(u)$，尽管形式可能变得要复杂一些，但还是要比f（x）更容易计算积分。如何恰当地选取 $x=f(u)$ 而达到这个目标，则仍然是属于熟能生巧的范畴。因此学习积分计算，最为重要的就是加强练习。

从换元法二的过程，可以看到它的一个条件就是要求f（x）连续，而 $x=f(u)$ 必须具有连续的导数，并且这个导数不能等于0。

同样需要注意的一点是，必须把变量x通过 $u=f^{-1}(x)$ 代入积分结果，从而得到我们真正要求得到的积分 $\int f(x)dx$。

下面列出应用换元法所求出的一些常用函数的不定积分，在后面可以作为公式使用，不过希望同学们能够自己动手加以推导，这样才能真正掌握这些公式，同时也锻炼了自己运用换元法的能力。

（1）$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$ ；

（2）$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ ；

（3）$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ ；

（4）$\int\sec xdx=\ln|\sec x+tgx|+C$ ；

（5）$\int\csc xdx=-\ln|\csc x+ctgx|+C$ ；

（6）$\int shxdx=chx+C$ ；

（7）$\int chxdx=shx+C$ ；

（8）$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$ ；

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$;

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

分部积分法。

相当于乘积的求导法则的就是所谓分部积分法，我们可以直接从乘积的求导公式来推导出分部积分法。如下：

根据乘积的求导公式

$(uv)' = u'v + uv'$ ，

得到

$u'v = (uv)' - uv'$ ，

如果采用微分形式，就是

$vdu = d(uv) - udv$ ，

两边取积分，就分别得到

$\int vu'dx = uv - \int uv'dx$

和

$\int vdu = uv - \int udv$ ，

这两个表达式分别代表了两种方式的分部积分法，即或者把原来的积分凑成 $\int vu'dx$ 的形式，然后通过计算 $\int v'udx$ 而得到结果；或者把原来的积分凑成 $\int vdu$ 的形式，然后通过计算 $\int udv$ 而得到结果；当然这里的前提，或者说要使得使用分部积分法有意义，就必须首先考虑到计算 $\int v'udx$ 和 $\int udv$ 要比原来的积分计算简单。而所谓分部的意思，就是把本来的积分凑成上面的u和v的组合形式。如何恰当地凑成u和v，使得简化积分过程的目的能够达到。则必须通过大量的练习，来增加观察力。

有理函数以及可以化成有理函数的函数积分。

对于任意有理函数，存在一个固定的代数算法，可以把它分解为四种基本形式的有理分式的和，而这四种基本形式的有理分式存在相应的积分公式。列出如下：

(1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A\ln|x-a| + C$

(2) $$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int \frac{1}{(x-a)^k} d(x-a) = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$$

(3) $$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx = \frac{P}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2Q-Pp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

(4) $$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Pt+(Q-\frac{Pp}{2})}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{P}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+(Q-\frac{Pp}{2})\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt$$

其中 $t=x+\frac{p}{2}$；dt=dx；$a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$。

可以很容易地求出（4）中的第一个积分为

$$\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt=-\frac{1}{(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}$$。

而对于第二个积分式，我们可以得到递推公式

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_n$$，

其中 $I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$。

如果有理函数的自变量是以三角函数的形式出现的，那么我们可以通过如下的一套半角变换，把三角函数有理式化成一般有理式，从而进一步求出积分来。

(1) $tg\frac{x}{2}=t$；

(2) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$；

(3) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$；

(4) $x=2arctgt$；

(5) $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$。

不过，在这种涉及繁复的代数计算时，一定要注意掌握一个原则，就是动手之前仔细观察，根据经验判断是否存在更为简单的方法，只有在确实找不到简单方法之后，再开始根据这种确定的计算程式来进行

计算。

初学者可能觉得这里所涉及到的公式过于繁复，实际上只要我们能够自己尝试作一些推导，勤于练习，还是能够熟练掌握的。

定积分及其几何意义与性质。

顾名思义，定积分应该与不定积分具有密切的联系，不过从历史的发展的角度来看，定积分与不定积分完全是相互独立产生的，只是后来这两个概念的进一步深化发展，人们才了解了这两个概念之间的相互关系，而这种关系从某个角度来看，正是反映了微积分的核心思想所在，我们在后面讨论变上限定积分和牛顿-莱布尼兹定理时，再仔细分析这点。

目前我们仍然遵循历史发展的顺序来展开概念。

定积分概念具有深厚的物理世界的直观来源，简而言之，任何涉及对连续变量的求和，实际上就是使用了定积分的思想。

首先需要设函数y=f（x）在闭区间[a，b]上连续，因为在本课程我们只考虑连续的情形。然后把闭区间[a，b]分成n个任意的部分，同时又在每一个部分内部取任意一点，对每一个部分，作这点的函数值与这个部分区间的长度的乘积，就得到了n个这样的乘积，把它们都加起来，这就是所谓的求和，作为一种近似计算，这个计算程序是我们在大量的实际问题当中都需要遇到的，这里积分的思想，就是看到在这n个区间长度当中，肯定存在一个最大的长度值，然后运用极限的思想，取这个最大长度值趋向于0时，求上面的n个乘积的和的极限。

形式地表示出来，就是

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

。

其中 Δx_i 就是这n个区间长度当中最大的长度值，x_i 为第i个部分区间中的任意一点，这个极限就称为函数f（x）在闭区间[a，b]上的定积分。

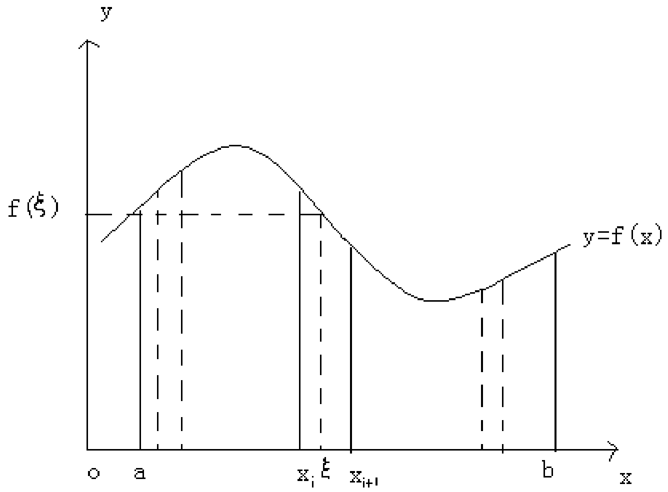
注意在上面的记法当中，目前dx还没有任何的意义，还不能理解为变量x的微分，而只能把右边的表达式作为一个整体来理解，即作为一个和式的极限而已。

显然，这个极限就不再是一个近似值了，而是一个精确值。

不过，这里的问题首先是这个极限是否存在，也就是函数是否可积的问题；然后是如果存在，则如何求出这个极限值，也就是积分法的问题。这两个问题可以说是积分学的两个主要问题。我们的课程主要涉及的是后面的问题，前面的问题需要很多的理论准备，因此不作要求。

完全只是基于这种作为和式的极限的理解，就可以得到定积分的很多性质，以及它的几何意义。

所谓定积分的几何意义，实际上在它的定义构造当中已经很清楚地表现出来。如图所示，我们可以看到，所谓求和的几何意义，就是求函数所表示的曲线与X轴，以及x=a，x=b这两条直线之间所夹的部分的面积，而极限值就给出了面积的精确值。



从几何的角度来理解定积分的意义，就可以非常容易下面的定积分的性质。

（一）被积函数的齐性。

如果函数f（x）在闭区间[a，b]可积，那么函数kf（x）也在闭区间[a，b]可积，其中k为任意常数，并且常数可以从积分号下提出来，即

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$。

（二）被积函数的加性。

如果函数f（x）和g（x）在闭区间[a，b]可积，则函数f（x）$\pm$g（x）在闭区间[a，b]也可积，并且有

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$。

上面两个性质合起来，实际上就是定积分运算对被积函数的线性不变性。

（三）积分区间的可加性以及有关积分区间的性质。

如果函数f（x）在某个区间可积，那么函数在这个区间的任意子区间都可积，如果在这个区间任意顺序取三点$a<b<c$，则有

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)$$。

实际上对于任意有限多的点，这个性质都是成立的。

另外还有有关积分区间变换的性质：

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$；

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$；

（四）连续奇函数在对称区间上的定积分为0。

只要按照定积分的几何意义来理解，就可以很容易地看到这点。

（五）偶函数在对称区间上的定积分等于在半区间上的定积分的2倍。

这个性质同样是具有非常直观的几何意义。

（六）估值等式与不等式。

最简单的就是

$$\int_a^b dx = b-a$$；

如果 $f(x) \le g(x)$ ，那么有

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$；

设定义在实数集合上的连续函数f（x）为以T为周期的周期函数，那么对于任意实数a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$；

如果函数f（x）在闭区间[a，b]可积，并且存在最大值M和最小值m，那么有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$；

连续函数y=f（x）在闭区间[a，b]上的平均值为

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$。

同样通过定积分的几何意义，可以非常直观地得到这些性质。

（七）中值定理。

如果函数f（x）在闭区间[a，b]可积，则在这个闭区间上存在一点c，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$。

在后面讨论牛顿-莱布尼兹定理时，我们会理解到这个积分学的中值定理，实际上是对应于微分学当中的中值定理的。不过需要注意的是，微分学当中的中值定理要求函数的导数在开区间（a，b）上存在，而积分学当中的中值定理要求f（x）在闭区间[a，b]上连续。也就是说，条件不同。

根据定积分的几何意义，这个性质同样是非常容易理解的。

变上限定积分。

我们继续讨论前面的定积分的定义表达式 $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ 的含义。

首先 $\int_a^b f(x)dx$ 给出的是一个唯一确定的数值，它是由a，b以及函数f（x）所决定的。与闭区间[a，b]上分点的取法无关，也与每一个部分区间上的 x_i 的取法无关，与 Δx_i 的取法无关， 只要它是最大的就可以了。因此我们对于一个给定的函数f（x），不妨可以把 $\int_a^b f(x)dx$ 看成是a或者b的函数，因此可以考虑先固定一个量，比方说a，而把b换成变量t，这样我们就得到了一个单变量的函数

s（t）$=\int_a^t f(x)dx$。

这个函数s（t）就是所谓变上限定积分。

从几何的角度来看，这个新的函数反映的是随着t在X轴上的位置的变化，而导致的相应的曲线与X轴，以及x=a，x=t这两条直线之间所夹的部分的面积的变化。我们可以得到这个作为函数的变上限定积分s（t）与函数f（x）的关系。

我们求变上限定积分s（t）的导函数如下：

$$s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_a^{t+\Delta t} f(x)dx-\int_a^t f(x)dx}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_a^t f(x)dx+\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx-\int_a^t f(x)dx}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lim_{\Delta t\to 0} f(t+\frac{\Delta t}{2})\cdot\Delta t}{\Delta t}$$

$$=f(t)$$

最终，我们看到 $f(x)$ 实际上是s（t）的导函数！而s（t）就是 $f(x)$ 的原函数。因为实际上x和t是同一个变量，只是在变上限定积分里是作为参数出现的而已。因此按照前面我们已经学习过的不定积分的定义，s（t）$=\int_a^t f(x)dx$ 实际上就是一个不定积分的表达式！

我们至此可以看到引入变上限定积分的目的，就是给出定积分和不定积分的本质关系所在。而上面得到的 $s'(x)=f(x)$ 就是所谓微积分第一基本定理。

牛顿-莱布尼兹定理。

上面揭示了定积分和不定积分之间的关系以后，我们就可以到达微积分的第二基本定理，也就是所谓牛顿-莱布尼兹定理：

设f（x）在闭区间[a，b]上连续，F（x）是f（x）的任意原函数，那么有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$。

这个定理实际上也给出了一个计算定积分的方法，不过必须注意到一种情形，即f（x）在闭区间[a，b]上可积时，并不一定要求函数在闭区间[a，b]上连续，而且可以允许在闭区间[a，b]上存在有限个第一类间断点，这时，应用牛顿-莱布尼兹定理计算定积分，就必须分段进行考虑。

定积分计算以及近似计算。

一般定积分的计算分成以下几种方式。

1．直接应用定积分的定义进行计算。

这种计算方式的步骤也就是定义定积分的步骤：

（1） 分割积分区间；

（2） 写出一般的乘积式；

（3） 写出和式；

（4） 对和式求极限。

由于这种计算方式需要进行极限运算，一般比较麻烦，所以不常使用这种方法。

2．直接计算面积。

如果被积函数与X轴以及上下限所围成的面积部分非常规范，容易直接计算面积，就可以直接用面积作为积分值。

3．应用牛顿-莱布尼兹定理计算定积分。

这样就把定积分的计算转化为不定积分的计算，不过对于分段函数必须非常小心。

4．换元法。

相应于求不定积分时的换元法，求定积分也可以通过换元来计算。

如果f（x）在[a，b]上连续，而x=g（u）满足

（1） g（u）在闭区间$[a',b']$上存在连续导数；

（2） 当u属于$[a',b']$时，则有$a \le g(u) \le b$；

（3） $g(a')=a, g(b')=b$；

那么就有$\int_a^b f(x)dx = \int_{a'}^{b'} f[g(u)]g'(u)du$。

应用换元法之前一定要注意验证条件是否满足。

5．分部积分法。

相应于求不定积分的分部积分法，有如下的计算定积分的分部积分法：

设u（x），v（x）在[a，b]上存在连续导数，则有

$$\int_a^b uv'dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b vu'dx$$。

运用分部积分法求定积分的技巧和求不定积分时是类似的。

利用分部积分法可以推导出Wallis积分公式，具有很大的应用价值，希望同学们能够记住：

设$I_n = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^n x dx$，则存在一个递推公式：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

可以得到

当n为偶数时，有

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{p}{2}$$；

当n为奇数时，有

$$I_n=\frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 5\cdot 3}。$$

6．利用被积函数与积分区间的对称性质。

在前面讨论定积分的性质时，我们已经列举，特别要请同学们注意这个方法，这个技巧是我们在观察积分式时，首先应该留心的问题，以免本来可以很简单完成的题目，反而只是知道死套公式。

我们在前面已经提到进行积分计算的复杂性与求导数是具有本质不同的，因此在实际问题当中，我们不可能指望总是能够完成解析性质的积分计算，因此我们很多时候还需要进行积分近似计算。

实际上，任何定积分的近似计算，都是直接基于定积分的定义以及几何意义的，因此也就是归结为面积的近似算法。

最为直截了当的面积计算，就是给一个平面上的曲线面积打方格，直接数方格就得到面积，这种方法适合于需要进行积分的函数不能通过解析函数形式表达，或者是表达出来非常的复杂，因此只能使用这种非常不精确，而且是依赖于作图精确度的方法。

在拥有被积函数解析表达式的情况下，可以直接按照定积分的定义方式来计算定积分值，只是分割区间时采用一种规范的方式，一般是等距的，这样就得到了所谓的矩形法，作为一种改进，每一个分割区间的乘积式所代表的面积，可以采用比矩形更为逼近的形状，例如梯形，着就得到了梯形法。

对于梯形法作更进一步的改进，就是把梯形的斜直边，改为抛物线段，一般用曲线段逼近曲线段，比用直线段具有更好的精确度，这就得到了所谓抛物线法。

广义积分。

在本课程，我们考虑的广义积分主要是两种，（1）函数在积分区间上无界的广义积分；（2）积分区间无限的广义积分。

（1）函数在积分区间上无界的广义积分。

无界函数就是在积分区间存在无穷间断点，我们主要讨论只有一个无穷间断点的情况，对于任意有限多个无穷间断点的情况，处理方式是完全类似的。

无穷间断点在积分区间可以是处于端点处，也可以是处于内部，对于处于内部的情形，可以通过把函数看成是分段函数的方式，从而也就使得无穷间断点仍然是处在端点处。至于左右端点，则不存在任何差别。

定义这种情况下的广义积分的要点，就是运用极限的方法，使得处于无穷间断点一边的积分限趋向于无穷间断点，然后求相应的定积分的极限，如果这个极限存在，则称相应的广义积分存在或收敛，否则，就是不存在或者是发散。

广义积分的几何意义实际上仍然还是非常直观的，因为一个无穷间断点实际上也就意味着函数取消在该点处存在一条垂直渐近线，则函数的广义定积分仍然还是可以定义为函数曲线与X轴之间的面积，只是这里的一条端线由一条垂直渐近线替代，而剩下的问题就是这个面积是否收敛为一个有限值，如果是，则又是多少，也就是求极限的过程。

（2）积分区间无限的广义积分。

同样，无穷区间上的积分也可以归结到求极限的过程。

无穷区间，就是指$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$，以及这两者之并$(-\infty,+\infty)$，实际上我们只需要讨论一种就可以了。

设f（x）在$[a,+\infty)$上连续，要想定义在这个区间上的定积分，可以首先取一个正常的定积分，也就是任意取一个方便的b>a，再定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)$$ 。

然后再同样还需要考虑这个极限的存在性问题，以及计算问题。

这种广义积分的几何意义同样还是可以用面积表达，只是这里函数的曲线在X轴的一端或者两端都无限延伸而不封闭，这样，如果要求极限存在，则函数曲线必须以X轴为水平渐近线，不过，反过来，则不一定成立。

定积分的应用。

定积分的起源本来就具有深厚的几何与物理的背景，因此定积分在几何与物理，以及广泛的知识领域内都拥有大量的应用。本课程我们主要集中在几何与物理以及工程技术方面的应用上。

在实际问题当中应用定积分的关键，在于基于具体问题的分析，找出相关量的微元表达式，然后再根据这个量所遵循的函数对这个微元求积分，这里的分析过程主要就是定积分的定义构造过程，而最终计算则利用了灵活的积分法所带来的方便，而并不是死板地对和式求极限。

当然在具体的问题当中，会要求一些针对性的技巧，这只有在具体问题的加以掌握，特别是要多加练习，熟悉各种类型的问题，才能保证在考试当中不会出现茫然不知所措的情形。我们在后面会结合例题进行有关介绍和讲解。

二，答疑解难。

1．既然求导与求不定积分互为逆运算，而对于初等函数，我们总能求出导函数，那么是否对于初等函数总能求出它的不定积分？

[答]：不能。

其实只要比较分析一下基本求导公式和基本积分公式，就可以发现这两种运算具有一个明显的差别，就是所谓基本求导公式，是对每一种基本初等函数分别进行求导的公式，得到的导函数具有两种类型，一是得到和原来基本初等函数相同类型的初等函数形式，例如指数函数，幂函数，三角函数中的正弦函数与余弦函数，二是得到了与原来函数不同类型的函数形式，例如对数函数，三角函数中的正切函数，余切函数，以及反三角函数，这样当我们进行这些运算过程的逆运算时，就只能对上面的通过求导而保持同样初等函数形式的那些函数，进行积分而回到同样类型的初等函数形式，除此之外，就只能针对一下特殊形式的初等函数进行积分，这样实际上就意味着并不是任意形式的初等函数，都可以通过积分而得到仍然是属于初等函数的形式，相反，求导则由于所有类型的基本初等函数都可以进行，那么根据求导法则，对于通过对基本初等函数进行有限次的四则运算和复合而得到的任意初等函数，都总是可以求出导函数来，显然，对于积分，就没有这么好的结果了。从这里可以看出，所谓初等函数，从数学实质的角度来看，并不是一个很有意义的概念，而只是一个方便的概念，对于积分运算并不具有封闭性，这是初等函数这个概念本身所具有的局限，而不是说求导与不定积分并非严格意义上的逆运算。

2．运用分部积分法的基本技巧。

[答]：首先可以想象，要对一个被积函数成功运用分部积分法，重要的前提，就是这个被积函数必须能够写成两个因式的乘积，而使得分部积分法有效的关键，则是凑成上面的形式以后，希望 v' 变得更为简单，而u不至于变得更为复杂。

下面我们仔细观察一下各种基本函数积分的特征。

由于指数函数，正弦和余弦函数在求导后保持原来的函数类型，而幂函数求一阶导数后，就降一阶次，因此对于如下形式的积分：

$$\int x^n e^x\,dx;$$

$\int x^n \sin x dx;$

$\int x^n \cos x dx;$

就可以通过把 x^n 的部分作为v，而反复运用分部积分法，降低它的阶次，最终使得被积函数部分只剩下指数函数和正弦，余弦函数。

而对于如下形式的积分：

$\int x^n \ln x dx;$

$\int x^n \arcsin x dx;$

$\int x^n \arccos x dx;$

$\int x^n arctgxdx;$

则可以利用对数函数于反三角函数的导数为有理分式的特点，把 x^n 的部分作为 u'，从而替换为对对数函数与反三角函数求导，得到有理分式，就有可能简化了积分过程。

有一个常用的运用分部积分法得到的积分式如下：

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x tgx + \frac{1}{2};\ln|\sec x + tgx| + C$$，

这个公式非常有用，希望同学们自己动手推导一下，记住了可以直接应用。