第六章.向量代数与空间解析几何

本章内容在本课程当中是单独的一个部分，应该说是属于几何的内容，之所以需要在微积分的课程里进行单独的讨论，是因为我们在后面学习多元函数的微积分时，必须和这些几何知识发生关系，所谓多元的函数，从几何意义方面来理解，就是定义域在平面乃至更高维度的空间区域上，这样如果要想得到对于多元函数的直观几何理解，就必须对于平面乃至更高维度的空间中的几何现象具有一定的知识。

向量。

向量可以说是几何的最为基本的概念。因为几何对象的两个基本要素：方向和长度，用一个向量就可以完全表达，从向量的概念出发，可以构造出整个的几何世界。

由于本课程的限制，我们不从一般的观念出发来展开向量的理论，而是基于直观的，运用向量来表示的几何当中的有向直线段，来说明我们需要涉及的有限的向量知识。

我们完全可以把一个向量理解为一根有向直线段，而不会出现任何理论上的错误。基于向量的这种直观图象，可以定义向量的基本属性。

首先，我们定义两个向量相等的意思，就是两个向量的大小与方向都相同，对于这里的具体的一种向量—有向直线段，就是必须长度相等，而方向相同，所谓方向相同，按照几何的意义，就是两根直线段相互平行，而且指向相同。

注意，这里初学者常常产生误解的地方，就是认为要求两个有向直线段方向一样，就一定是要求它们在同一个直线上，或者是相互重合，这是因为还不习惯在一般的空间当中考虑问题，特别是要养成在三维空间当中考虑几何对象的习惯，记住方向相同，是与这两个向量的空间位置无关的，只要它们所在的直线相互平行，而指向一致即可。

在两个向量之间定义加法与减法，就是我们在力学当中以及很熟悉的力的合成的平行四边形法则，当然这是一种直接的基于几何图象的定义方式，下面我们通过在空间引入坐标，来得到更一般的定义。

空间直角坐标系以及向量代数。

在空间当中引入坐标的目的，和物理学当中引入单位制一样，是提供一个度量几何对象的方法，首先一个坐标系必须能够提供方向的定义，使得任意的方向都能够由于坐标系而得到确定与唯一的描述；然后必须能够提供长度的单位，基于这个单位能够度量空间长度。

能够满足上面这两个基本要求的坐标系可以有很多的形式，我们经常使用的坐标系就是直角坐标系。

我们已经强调了一个向量的大小与方向是与它所处的空间位置没有关系的，换一个说法，就是一个向量在空间进行平移时，不影响它的大小与方向。那么在空间中，对任意一个向量的度量，都可以通过把这个向量平移到以坐标系的原点为起点的位置，再用它的终点的坐标来表征这个向量的大小与方向。显然，任意的一个向量，只要是通过平移而处于这种方式，就只会唯一的，而空间中的任意一点在一个这样的直角坐标系里的标度也是唯一的。因此这样决定的一个向量的坐标也就是唯一的。

本课程我们主要只考虑三维的情况，因此一个向量可以用一个唯一的坐标来表示，在直角坐标系里，也就是由三个实数组成的三元组：（a，b，c）。

基于上面对于唯一性的分析，可以得到坐标表示的向量的相等的含义，就是坐标三元组的分别相等。

进一步，为了更为方便地度量一般的向量，我们引入单位向量的概念，就是在坐标轴方向上具有单位长度的向量，在直角坐标系当中，习惯的写法，就是 $\vec{i}$ ，$\vec{j}$ ，$\vec{k}$ ，分别表示在X，Y，Z轴上的单位向量。按照坐标三元组的写法，就是

$\vec{i}$ =（1，0，0）；

$\vec{j}$ =（0，1，0）；

$\vec{k}$ =（0，0，1）。

然后在直角坐标系当中，就可以应用代数形式来表示向量的运算了。

首先代数加法，就是三个坐标分别进行代数加法，得到的值，就分别是和向量是三个坐标。

运用这个定义，就可以很方便地把一般向量写成三个单位向量的线性组合的形式：

$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$，

运用这种形式，就可以很方便地给出向量的运算法则，最基本的运算法则，就是线性运算法则：

设 $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$， $\vec{B} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$，那么对于任意实数m，n，我们有

$$m\vec{A} + n\vec{B} = m\ (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) + n\ (a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k})$$

$$= (ma + na')\vec{i} + (mb + nb')\vec{j} + (mc + nc')\vec{k}\text{。}$$

既然向量含有方向这个要素，那么如何通过它的坐标来得到直接表达方向的角度度量呢？

这里的关键是引入内积的概念。

一般地我们定义两个向量的内积为它们的三个坐标分别相乘，再相加而得到的一个实数。写成公式，就是

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'\text{。}$$

注意，这里使用的是点乘号，而不能使用叉乘号×，因为在向量运算当中，×具有别的定义。

根据这个定义，不难验证内积满足交换律，结合律以及分配律。

按照这个定义以及单位向量的坐标表示，可以得到单位向量之间的内积如下：

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$；

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$。

运用内积还可以表达向量的绝对长度，称为向量的模：

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

内积的几何意义，就是这两个向量的模的乘积乘以这两个向量的夹角：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cos a\text{。}$$

注意这个等式的左右边的点乘号的含义是不同的，左边的表示内积，而右边的表示一般的实数之间的乘法。

从内积的几何意义可以看到，我们可以反过来应用内积来表达向量的方向，也就是向量的方向余弦与方向角。

所谓向量 $\vec{A}$ 的方向余弦就是它的所谓规范化向量 $\dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$ 的三个坐标：

$$\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{k}\text{，}$$

而这三个坐标所代表的正是规范化向量$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$分别与三个单位向量之间的夹角的余弦，或者说，正是向量 与三个坐标轴之间的夹角的余弦，因此通过这三个方向余弦，就得到了相应的方向角，也就是向量$\vec{A}$与三个坐标轴之间的夹角。

不难验证任何向量的三个方向余弦值满足一个关系，就是它们的的平方和为1，反过来，也就是说只有平方和为1的三个实数，才能构成某个向量的方向余弦。

进一步，我们可以通过下面的定理证明，体会到内积在描述几何对象的有关方向的性质时，具有重要的作用。

两个非零向量相互平行的充要条件是

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$；

两个非零向量相互垂直的充要条件是

$$aa'+bb'+cc'=0$$

两个向量之间还可以定义一种乘法，记成×，即所谓外积，也称为叉积。

外积同样具有鲜明的几何意义，即两个互不平行的向量的外积的大小等于分别以这两个向量为邻边的平行四边形的面积，写成公式，就是

$$|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin a$$，

其中a 为两个向量之间的夹角。

而同时这个外积还具有方向，就是说，两个向量的外积同样是一个向量，外积同时与两个向量相互垂直，并且按$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{A}\times\vec{B}$的顺序构成右手系。

如果这两个向量相互平行，或者至少有一个向量为零向量，则定义它们的外积为零向量。

根据对于，可以容易地验证外积不满足交换律和结合律，但满足所谓反交换律，即交换位置后，符号相反。在不进行交换的情况下，也满足分配律。

对于单位向量之间的外积，非常有用，希望同学们不仅是记住，还应该从几何的角度加以掌握：

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$；

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$。

如果应用坐标分量来表示外积，则直接利用上面的外积运算律与单位向量外积运算结果，就可以得到如下：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a&b&c\\a'&b'&c'\end{vmatrix}$$。

如果交换两个向量的相乘顺序，就自然地得到：

$$\vec{B}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a'&b'&c'\\a&b&c\end{vmatrix}$$。

直线与平面的方程以及图形。

下面我们把向量作为几何对象的基本元素，用来构造基本的几何对象，即平面与直线。

对于平面，有如下几种构造方程的方式：

（1）我们可以利用一个几何意义的描述，即与一个给定直线垂直的平面上的所有直线都与这根直线垂直，而得到平面的所谓点法式方程：

已知平面通过点（a，b，c），与平面垂直的一条直线的方向数为A，B，C，则这个平面的方程为

$$A(x-a)+B(x-b)+C(x-c)=0,$$

显然其中A，B，C不能同时为0。

（2）如果已知平面在三个坐标轴上的截距为a，b，c，则可以得到平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

显然其中的a，b，c不能有一个为0。

（3）如果已知平面通过三点（a，b，c），（d，e，f），（g，h，i），那么可以得到平面的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix}=0,$$

显然这里的三点必须是不同的三点。

（4）已知平面的法线的方向角与原点到平面的距离p，可以得到法线式方程：

$$x\cos a+y\cos b+z\cos g-p=0$$

（5）由点法式方程，我们可以得到平面的一般式方程：

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

这里A，B，C仍然可以看成是平面的某个法线的方向数。

之所以称为一般式，是因为这个方程是三元一次方程的一般形式，可以证明任何平面都可以用三元一次方程来表示，而任何三元一次方程都可以表示为一个平面。

这个方程的四个系数可以表达平面的一些位置特征：

D=0时，平面通过原点；

A=0（B=0，C=0）时，平面与X（Y，Z）轴平行；

A=B=0（B=C=0，C=A=0）时，平面与OXY（OYZ，OXZ）平面平行。

使用一般式方程，给出如下的几何构造：

对于两个平面之间的相对位置，也就是相对方向，可以完全由它们各自的某个法线向量之间的相对方向来决定，因此我们可以得到如下有关两个平面相对位置的解析条件。

（1） 两个平面平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}。$$

如果 $=\frac{D_1}{D_2}$ 则两个平面重合。

（2）两个平面垂直的充要条件为

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

（3）一般地，如果两个平面的夹角为 a ，则夹角的余弦为

$$\cos a=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$。

（4）一点（a，b，c）到平面的距离为

$$d=\left|\frac{Aa+Bb+Cc+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

对于直线，可以给出如下几种构造方程的方式。

（1）把直线理解为两个平面的相交部分，得到一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$。

（2）如果已知直线通过点（a，b，c），它的方向数为p，q，r，则得到参数式方程

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$。

（3）如果已知直线通过两点（a，b，c），（d，e，f），则得到两点式方程

$$\frac{x-a}{d-a}=\frac{y-b}{e-b}=\frac{z-c}{f-c}$$。

（4）已知直线与一个向量 $\vec{A}$ 平行，并且直线通过一个矢径 $\vec{R}$ 的端点，则得到向量式方程

$$\vec{r}=\vec{R}+t\vec{A},(-\infty<t<\infty)$$。

运用上面的方程，可以解析地给出如下的几何构造。

（1）两条直线之间的距离，可以利用直线的向量式方程得到

$$h=\frac{|(\vec{R}_2-\vec{R}_1)\cdot\vec{A}_1\times\vec{A}_2|}{|\vec{A}_1\times\vec{A}_2|}$$。

（2） 对于一条参数式方程的直线和一个一般式方程的平面，可以得到它们之间的夹角的正弦为

$$\sin a=\frac{|pA+qB+rC|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$。

旋转曲面的方程。

平面上任意曲线绕平面上的一条直线旋转，就产生所谓的旋转曲面。

设YZ坐标面上的一条曲线y=f（z）绕Z轴旋转而产生旋转曲面，这样曲线上面的每一个点的轨迹都是一个圆，因此可以直接用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 来代替曲线方程中的y，就得到了曲面的方程，即

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=f(z)$$。

这样我们就一般得解决了旋转曲面的问题，如下就是几种典型的旋转曲面：

（1）抛物线 $y^2=2pz$ 绕Z轴所产生的旋转曲面，称为旋转抛物面，方程为

$x^2+y^2=2pz$ ；

（2）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕Z轴所产生的旋转曲面，称为旋转椭球面，方程为

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ ；

（3）双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕Z轴所产生的旋转曲面，称为旋转单叶双曲面，方程为

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ ；

（4）双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕Y轴所产生的旋转曲面，称为旋转双叶双曲面，方程为

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2+z^2}{b^2}=1$ ；

注意对于上面的这种规范形式的方程，还是比较容易辨认的，如果出现经过变形的方程，要想分别它的类型，就比较麻烦一些，这就要求我们多加练习，不怕麻烦，才能真正掌握它们。

柱面的方程。

柱面就是一条直线沿着给定的曲线运动，而直线在运动过程当中保持固定不变的方向，这样直线所产生的曲面，称为柱面，而这条直线称为柱面的母线，曲线称为柱面的准线。

柱面方程的一个关键特征就是如果母线与Z轴平行，则方程当中不出现变量z，如果母线与其他轴平行，同样在方程当中就不会出现相应的变量。反过来说，也是成立的，一个退化的特例，就是属于1次方程的平面方程，就具备这个特征。

锥面的方程。

联结一点和一条不通过这点的曲线上面任意一点的所有连线，构成一个曲面，称为锥面。那点称为锥面的顶点，曲线称为锥面的准线。

一般得，可以利用参数方程建立锥面的方程。

设原点为顶点，准线方程

$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=h,(h\neq 0) \end{cases}$，

那么锥面方程为

$f(\frac{xh}{z},\frac{yh}{z})=0$ 。

二次曲面方程。

上面对于曲面的对于总是从构造曲面的几何特征入手，而如果从方程的代数特征来对于曲面进行分类的话，可以看到曲面之间更为深刻的关系。

我们把三元二次方程所描述的几何对象称为二次曲面。正是由于我们是从代数的角度出发讨论几何曲面，因此就不可避免出现对于代数方程有意义，而从几何的角度来看，意义不大的情况，比方说二次方程出现虚根，这样得到的曲面，我们定义为虚曲面，而对于方程的退化情况，则对应于几何的退化情况。对此，我们应该仔细分析，以免在讨论问题时，出现遗漏的情况。

（一）椭球面。

标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中a，b，c都大于0，称为椭球的半轴，由于方程只是含有各个变量的平方项，因此曲面关于各个坐标轴都是对称的。

显然球面是椭球面的一种退化情形，这时三个半轴相等。而如果只有其中两个半轴相等，则退化成为旋转椭球面。

如果使用一个平行于坐标面的平面作截面法，就是使得一个变量取常数，直接代入，就可以很容易得看到，得到的是一个椭圆方程。

（二）单叶双曲面。

标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中a，b，c都大于0，由于方程只是含有各个变量的平方项，因此曲面关于各个坐标轴都是对称的。

如果取a=b，则退化为旋转单叶双曲面。

从方程形式就可以看出，它的截面与椭球面有相同的地方，也有不同的地方。

用垂直于Z轴的平面作截面，得到的是椭圆，用垂直于X，Y轴的平面作为截面，得到的是双曲线。

而单叶双曲面还具有一个和椭球面本质上不同的特征，就是它属于所谓的直纹面，即可以完全通过直线的运动构造出来的曲面。前面所讨论的柱面和锥面都是属于直纹面。

通过方程的代数变形，可以得到两个与标准单叶双曲面方程等价的直线系方程组，分别由两个直线方程组成，同时含有一个可以取任意实数的参数k和l，如下：

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k(1+\frac{y}{b})\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}(1-\frac{y}{b})\end{cases};$$

和

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l(1-\frac{y}{b})\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}(1+\frac{y}{b})\end{cases}。$$

（三）双叶双曲面。

标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中a，b，c都大于0，由于方程只是含有各个变量的平方项，因此曲面关于各个坐标轴都是对称的。

用垂直于X轴的平面作截面，得到的是椭圆，用垂直于Z，Y轴的平面作为截面，得到的是双曲线。

（四）椭圆抛物面。

标准方程为

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,(pq>0)$$，

由于方程只是含有各个变量的平方项，因此曲面关于相应的各个坐标轴都是对称的。而p和q同号，则曲面只存在于半空间内。

如果取p=q，则曲面退化为旋转抛物面。

用垂直于Z轴的平面作截面，得到的是椭圆，用垂直于X，Y轴的平面作为截面，得到的是抛物线。

（五）双曲抛物面。

标准方程为

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,(pq>0)$$，

由于方程只是含有各个变量的平方项，因此曲面关于各个坐标轴都是对称的。

用垂直于Z轴的平面作截面，得到的是双曲线，用垂直于X，Y轴的平面作为截面，得到的是抛物线。

双曲抛物面同样属于直纹面，通过代数变形同样可以得到等价的直线系方程组如下：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2kz\\ \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{1}{k}\end{cases}$$；

和

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2lz\\ \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{1}{l}\end{cases}$$，

其中k和l为两个取任意实数的参数。

以上是最为典型的二次曲面，其他的属于二次方程的曲面，在前面实际上叶已经个别讨论过，同学们不妨自己从头归纳一下，以增加印象，梳理看起来比较繁复的知识。

空间曲线方程。

由于一般遇到的空间曲线方程都来自于满足某种条件的点的运动轨迹，因此描述这种曲线，最好是应用参数方程，特别是向量分量的参数方程。

构造这种方程的关键，首先就是在于分析清楚运动点所需要满足的条件，根据这些条件，有时候可能还需要适当地应用一些相关知识，选择恰当的参数，就可以列出运动轨迹的方程，叶就是得到了空间运动的曲线方程。

而在某些情况下，根据具体情况的不同，为了更为方便而直接地列出方程，可能还需要应用其他类型的坐标系，比方说极坐标系，球坐标系，等等，都需要根据具体问题来进行灵活选择。