# 第八章.多元函数积分学

在不同的问题当中，可以对多元函数的积分进行不同的定义，因此，我们需要在不同的问题背景当中来定义不同的积分概念。

二重积分。

二重积分实际上就是对二元函数求定积分，在实际问题当中，需要对二元函数进行求和计算，或者直观地说，涉及到体积的计算与具有在二维区域上的分布的物理量的计算，就需要运用二重积分的概念来进行。

因此我们对二重积分的定义，与对单变量函数的定积分的定义是完全类似的，只是这里的积分区域不是一维的，而是二维平面上的区域。这样通过把积分区域任意划分成只有公共边界的子区域，然后在每一个子区域当中任意取一点，取这点的函数值与该子区域的面积之积，再把所有的这样的乘积加起来，得到一个和式，接下来，就是我们已经很熟悉的极限过程，即使得所有子区域当中面积最大者的面积趋向于0，也就是使得子区域的数目趋向于无穷大，看和式是否存在极限，以及可能的话，这个极限是多少。这就是关于二重积分的可积性问题与二重积分的计算问题。

关于可积性的问题有下面一个简单的定理：

如果函数在一个有界闭区域上有定义并且连续，则这个函数必定在这个区域上可积。

从上面的二重积分概念的说明，可以得到与单变量函数的定积分相类似的几何说明，即被积函数所描述的曲面与其在自变量平面上的积分区域上的投影之间所夹的空间的体积。基于这样的理解，可以很容易得到如下的二重积分的性质。

（1）$\iint_D (if + jg)dx = i\iint_D fdx + j\iint_D gdx$，

其中i，j为任意常数。这是二重积分的线性性质；

（2），$\iint_D fdx = \iint_{D_1} fdx + \iint_{D_2} fdx$

其中 $D_1 \cup D_2 = D$。

（3）如果在区域D上有

$f(x, y) \le g(x, y)$，

则有

$\iint_D fdx \le \iint_D gdx$；

而对于D上的可积函数f，存在任意上界M和任意下界m，则有

$mD \le \iint_D fdx \le MD$

其中D为区域D的面积。

（4）设函数f为有界连通闭区域D上的连续函数，则一定在这个区域上存在一点（a，b），使得

$\iint_D fdx = f(a,b)D$；

这个性质还可以推广到比较一般的形式：

设函数g为D上的非负值连续函数，f在D上可积，则存在一个介于f在D上的上界与下界之间的唯一的常数k，使得

$\iint_D gfdx = k\iint_D gdx$。

## 二重积分的计算方法与应用。

（一）二重积分的基本计算方法是在直角坐标系当中，把二重积分化成二次积分，也就是按先后顺序分别对两个自变量求定积分，因此也称为累次积分。

在作二次积分时，首先是把一个自变量看成是一个参数，而不是看成变量，这样第一步是作单变量函数的定积分，然后得到一个包含第二个变量的表达式，再对第二个变量求定积分，这样就得到了二重积分的值。这里对于选择进行积分运算的自变量的顺序是完全任意的，也就是说，假设函数的积分区间，是由曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$，x=a，x=b所围成的区域，那么f在这个区域上的二重积分为

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_a^b f(x,y)dx$$

因此在实际问题当中，如果选择了一种积分顺序，而发现不是很恰当，或者显得很麻烦，则不妨尝试一下更换积分顺序，也许会更为恰当一些

（二）另外一种常常更为简单的计算二重积分的方法，是在极坐标下，通过把二重积分转变为二次积分来得到结果。

一般公式就是

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_a^b dq\int_{r_1(q)}^{r_2(q)} f(r\cos q, r\sin q)rdr$$

注意公式当中的面积元素带因子r，千万不要忘记。

之所以使用极坐标，是因为很多几何对象在极坐标当中具有更为简单的还是形式，这样就使得被积函数的形式更为简单，从而简化了积分计算。

直观地看，二重积分就是针对二元函数的定积分，那么只要是运用二元函数表达的变化规律，都有可能需要利用二重积分计算某种可加性质的量。

例如对于在一定的平面区域上的某个物理量的分布，就可以利用二重积分计算，比方说已知质量分布的平面薄片的质量，重心，转动惯量，均匀薄片的一阶矩，等等，对于计算体积以及与体积相关的物理量，更是需要运用二重积分进行计算。

## 曲面面积以及第一型曲面积分。

与二重积分主要是针对体积的计算不同，所谓曲面积分主要是针对与曲面有关的面积与质量的计算。而本课程只限制在处理光滑曲面或者是分片光滑的曲面，所谓光滑曲面定义为曲面的切平面连续转动，而法向量不为0。

计算曲面面积的关键是给出曲面的面积微元，即

$$ds=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy,$$

然后对微元直接进行二重积分即可得到曲面面积

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy。$$

如果进一步，曲面的面密度分布函数为 $m(x,y,z)$，那么通过我们熟悉的分割，求和，取极限这样一些过程，可以得到计算曲面的质量的公式为

$$m=\iint_D m(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}ds。$$

我们把上面的具有给定面密度分布的给定曲面的质量的计算加以推广，也就是考虑定义在给定曲面上的有界连续函数，或者分片连续函数 $f(x,y,z)$，用这个函数沿着曲面进行积分，也就是利用面积的可加

性，进行求和与取极限的过程，就得到所谓的第一型曲面积分，一般地写成$\iint_S f(x,y,z)ds$。

第一型曲面积分具有与重积分完全类似的性质，例如线性性质和积分区域可加性性质。

而第一型曲面积分的一般计算方法，完全类似于上面的计算曲面质量的方法，一般地有：

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_S f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy$$ 。

### 第一型平面曲线积分的概念及计算。

在平面上的曲线方程，固然可以看成是一个一元函数，如果沿着这个曲线具有某个物理量的密度分布，那么要沿着这个曲线，求这个物理量的总量，就必须定义一种相应的沿着平面曲线求和式极限的积分，这就是平面曲线积分。我们把所讨论的曲线限制为简单光滑曲线。

在沿着曲线进行分割与求和积分时，根据具体问题的不同，可以有两种方法，即对弧长进行积分与对坐标进行积分，这两种方法，分别称为第一型与第二型平面曲线积分。

我们这里首先讨论第一型平面曲线积分，定义为

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\Delta s\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,h_i)\Delta s_i$$ ，

其中 $f(x,y)$ 为定义在曲线L上的有界函数，把曲线L分成任意的n个光滑弧段，$\Delta s_i$ 为第i个弧段的长度，

$(x_i,h_i)$ 为第i个弧段上的任意一点，$\Delta s$ 为曲线上所有弧段中长度最长的弧段。

值得注意的是，尽管被积函数具有两个自变量，但是由于积分是沿着一条固定的曲线进行的，按照物理学的理解，就是只有一个自由度，因此通过引入适当的参数，就可以把被积函数变换为一元函数。

从定义可以看到，曲线积分只不过是一种沿着固定曲线所进行的积分，很容易理解第一型平面曲线积分同样具有一般积分所具有的各种性质，如线性性质，积分区域可加性性质，估值性质与中值性质。

由于第一型平面曲线积分的被积式实际上是一个一元函数与弧微分的乘积，因此可以得到第一型平面曲线积分的计算公式为

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y(t))^2}dt$$ ；

如果使用曲线的平面直角坐标系方程y=g（x），那么就得到相应的计算公式

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g(t))^2}dx$$ ；

而如果曲线用极坐标方程形式 $r=g(q)$ 给出，则相应的计算公式为

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{q_1}^{q_2} f(g(q)\cos q, g(q)\sin q)\sqrt{g^2(q)+g'^2(q)}dq$$ 。

可以看到，曲线积分最终还是简化为一元函数的定积分计算。

### 平面向量场以及第二型平面曲线积分的概念和计算。

向量场的概念可以说是直接来源于物理学中的场的概念，平面向量场的定义，就是在平面区域D上的一个向量值函数：

$$\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$$ ，

直观地说，就是在平面区域D上的每一点处都定义了一个向量，就构成了一个向量场。

如果在这样一个向量场中给定一条有向曲线，或者说沿着一条有向曲线，定义了一个有界的向量场，由于向量适宜于在坐标轴方向上进行分解，因此如果要求向量场沿着曲线的积分，一般对坐标进行积分，

这样的积分方式称为第二型平面曲线积分。

这里同样把曲线限制为简单并且光滑或者分段光滑。

这样我们得到向量形式的定义为

$$\int_L \vec{f}(x,y)d\vec{s} = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(x_i, h_i)\Delta \vec{s}_i$$ 。

这种曲线积分形式的一个特征就是曲线规定了方向，因此出现了一个新的性质，即如果使得曲线反向，则得到的积分值就变号。其他的一般性质，如线性性质，积分曲线的可加性仍然成立，不过由于曲线的方向性，在连接曲线段时，必须注意方向性。

虽然第二型平面曲线积分应用向量形式来表示比较简明，不过进行计算时，还是采用分量形式，并且是分别对每个分量单独进行计算。

设向量场的两个分量为 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ ，那么第二型平面曲线积分的计算公式为

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt$$ ；

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt$$ 。

向量场沿着曲线的积分也可以采用对弧长积分的形式，这是通过引入沿着曲线的正方向的任何一点的切向量 $\vec{t}$ 而得到的：

$$\int_L \vec{f}(x,y)d\vec{s} = \int_L [P(x,y)\cos(\vec{t},x) + Q(x,y)\cos(\vec{t},y)]ds$$ 。

## 格林公式。平面曲线积分与路径无关的条件。恰当微分。

上面我们已经根据不同的问题建立了两大类不同的积分形式，即重积分与线积分，那么重积分与线积分是否具有很紧密的关系呢？这是由格林定理通过格林公式揭示出来的：

设P（x，y）和Q（x，y）是在平面区域D上的具有各个一阶连续偏导数的函数，D的边界由光滑或者分段光滑的简单曲线组成，并且约定边界的方向为沿着曲线的这个方向运动时，区域D永远在边界线的左边，那么我们有格林公式如下：

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$ 。

这个公式具有非常重要的应用，即通过进行这两种不同积分形式的相互转化，而简化积分计算。

而这个公式更重要的应用，要求我们了解两个概念，即线积分的路径无关性，和单连通区域。

所谓线积分的路径无关性就是指如果一种曲线积分，在确定曲线的起点与终点后，积分值就是唯一的了，而与具体的起点与终点之间的曲线形状，或者说积分路径无关，我们就说这种曲线积分具有线积分的路径无关性。

一种曲线积分具有线积分的路径无关性的充要条件是：

设P（x，y）和Q（x，y）是在平面区域D上的具有各个一阶连续偏导数的函数，那么曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在D内具有线积分的路径无关性的充要条件为

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$ ，

其中C为D内的任意一条闭曲线。

在实际问题当中，为了方便判断上面的充要条件，需要单连通区域的概念：所谓连通区域就是指一个

区域内任意两点的连线都全部是属于这个区域。而单连通区域则是对于任意区域内的闭合曲线都可以连续地收缩为一点。可以想象，这种区域不允许在区域内部存在空洞。而存在空洞的这类不是单连通的连通区域称为复连通区域。

这样我们可以针对单连通区域得到更为方便的，判断一种曲线积分具有线积分的路径无关性的充要条件如下：

设P（x，y）和Q（x，y）是在单连通区域D上的具有各个一阶连续偏导数的函数，那么曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$在D内具有线积分的路径无关性的充要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}。$$

这样判断一种曲线积分是否具有线积分的路径无关性，就更为方便了，而对于具有线积分的路径无关性的曲线积分，不妨写成

$$\int_A^B Pdx+Qdy，$$

其中A和B为曲线的起点和终点。

判断一种曲线积分具有线积分的路径无关性，能够极大地简化这种曲线积分的计算，因为我们有可能通过选择合适的路径，使得积分计算变得非常简单。

我们知道对于单变量函数的微分运算，存在逆运算，就是函数的不定积分，那么对于多元函数的全微分，要引入它的逆运算，就需要应用具有路径无关性的曲线积分的概念。

首先是存在性问题，即给出一个微分形式Pdx+Qdy，如何判断是否存在一个二元函数f，使得df就是所给定的微分形式，或者说判断所给定的微分形式是否为全微分或者说恰当微分的问题。

下面的一个判断存在性的充要条件：

设P（x，y）和Q（x，y）是在单连通区域D上的具有各个一阶连续偏导数的函数，那么所给微分形式是一个全微分的充要条件为在D内总是成立

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}。$$

如果一个微分形式是恰当微分，也就是说具有函数f（x，y）作为它的原函数，那么它在定义单连通区域内的某条曲线L（起点为（a，b），终点为（c，d））上的线积分为

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=f(c,d)-f(a,b)，$$

可以看到这种计算方法，与单变量的定积分是完全类似的。

## 三重积分及其应用与计算。

基于我们已经讨论的二重积分，再推广到三重积分，甚至更多重积分，都是很容易的，不存在原则性的新问题。

首先定义完全是类似的，只是积分区域从二维到了三维，可以想象为在三维立体区域当中作分割，作和式，取极限这一系列我们已经很熟悉的步骤，而得到三重积分。

而且完全与二重积分类似地，三重积分同样具有线性性质和在积分区域上的可加性质，以及估值性质与介值性质。

三重积分可以应用于在空间区域具有一定分布的物理量的计算，例如具有空间密度分布的物体的质量，以及它们的重心，一阶矩，二阶矩，转动惯量等等。

与二重积分的计算一样，三重积分的计算主要就是转化为累次积分的计算，可以是先作一个定积分，再作二重积分的累次积分；或者是反过来，先作二重积分的累次积分，再作一个定积分。如何选择积分顺序对于决定计算是否简单具有非常重要的作用。而恰当地选择积分顺序，需要我们多加练习，才能增加经

验。例如如果我们能够观察到积分区域的某个方向的截面比较规范，最后作定积分的积分限比较容易得到，就不妨使用先作二重积分的累次积分，再作一个定积分的方法。

当然，作多重积分最为重要的是在选择好方法进行计算之前，能够对被积函数和积分区域都作仔细的分析与观察，寻找可能有的简化方法，比方说利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性等等。很多时候，把被积函数转化到别的坐标系里，常常能极大地简化被积函数的形式，从而简化积分计算过程，这是我们后面会讨论的问题。

而保证计算正确性的关键是各次积分的积分限的确定。因此要有意识地加强对一个多重积分确定积分限方面的训练。

### 圆柱坐标和球面坐标中的三重积分。

圆柱坐标就是把直角坐标的XY平面变换为极坐标，而Z轴不变所得到的坐标，因此圆柱坐标与直角坐标之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos q \\ y = r\sin q \\ z = z \end{cases}$$

熟悉与掌握一种坐标系的重要方法，是看当各个坐标变量取常数时，分别表示了什么样的几何对象，对于三维坐标的三个变量，就有三个变量分别取定值，和两两取定值一共6种情况，即：

r为定值，表示以Z轴为中心轴的圆柱面系；

$q$ 为定值，表示过Z轴的半平面系；

r为定值，表示以Z轴为法向的平面系；

r和$q$ 同时为定值，表示与Z轴平行的直线系；

z和$q$ 同时为定值，表示起始于Z轴并且与Z轴垂直的射线系；

z和r同时为定值，表示圆心在Z轴并且与Z轴垂直的圆。

球面坐标就是在三个正交平面上的坐标都是极坐标。坐标分量由点的位置向量长度以及位置向量分别和Z轴与X轴的正向的夹角组成。

球面坐标与直角坐标的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\sin a\,\cos q \\ y = r\sin a\,\sin q \\ z = r\cos a \end{cases}$$

同样的可以得到坐标变量取定值时所表示的几何对象：

r为定值，表示以原点为球心的球面系；

$q$ 为定值，表示过Z轴的半平面系；

$a$ 为定值，表示以原点为顶点，以Z轴为对称轴的圆锥面系；

r和$q$ 同时为定值，表示半平面上以原点为圆心的半圆系；

$a$ 和$q$ 同时为定值，表示起始于原点的射线系；

$a$ 和r同时为定值，表示圆心在Z轴并且与Z轴垂直的圆。

所有这些特别情形都希望同学们自己动手实际画出来，以加强印象，对于在这些坐标里计算多重积分非常有好处。

在这两种坐标里计算多重积分，首先是给出分别在这些坐标系里的体积微元的表达式：

在圆柱坐标系里是 $dv = rdrdqdz$ ；

在球面坐标系里是 $dv = r^2 \sin adrdqda$ 。

因此可以分别得到在这两个坐标系里的三重积分的计算公式：

在圆柱坐标系里是 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos q, r\sin q, z)rdrdqdz$ ；

在球面坐标系里是 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin a \cos q, r\sin a \sin q, rcoaa)\, r^2 \sin adrdqda$

在具体问题当中，如何选择坐标系，必须对具体问题经过分析才能决定，一般说来，或者是在某个坐标系里被积函数变得简单，或者说在某个坐标系里可以更为方便地选择积分顺序，从而简化计算，总之是把多重积分归结到曲线积分和曲面积分，看在哪种坐标里曲线或曲面的方程更为简单，或者说出现能够加以简化的现象。这些都必须通过我们加强练习来获得观察分析能力，而不是在看例题时，什么都理解，而面对实际问题时，就一筹莫展了。

## 第二型曲面积分的概念与计算。

在实际问题当中，我们还会遇到可定向的曲面，即能够明确定义一个曲面的两个侧面的曲面，也就是说，在这个曲面的任意一点，都可以确定而统一地定义曲面的两侧空间，这个定义不至于因为这点在曲面上位置的变化而变化，严格地说，就是假设在一点指定一个法向向量为正向，然后使得这点在曲面任意运动，那么在这点回到原来的位置时，如果法向方向保持不变，就说这个曲面是可定向的，或者说是有向的。

在有向曲面上，我们可以定义在这种曲面上的第一型曲面积分，为了表明是在有向曲面上作积分这个差别，特别称为第二型曲面积分：

设在有向曲面S上有定义的向量场

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

如果对于S上的每一点，向量场在正法向上的投影沿着S所作的第一型曲面积分存在，则称之为向量场对曲面S沿着指定侧的第二型曲面积分，即

$$\iint\limits_{S} \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$$

。

利用第二型曲面积分可以很自然地用来表示一个流速场通过曲面S的流量，而在物理学的场论里，类似的物理量是非常多的。

由于本质上第二型曲面积分是来源于第一型曲面积分，因此也就具有类似的性质，如线性性质，积分区域的可加性性质，不过对于有向曲面还可以取曲面的另外一侧作为曲面的法向，这样得到的第二型曲面积分值与原来的积分值异号。

计算第二型曲面积分，主要是采用转化为二重积分的计算的方法。

我们只考虑上面向量积分式的一个分量即可。例如把 $\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy$ 转化为XY平面上的二重积分。

如果S为母线平行于Z轴的柱面，则显然有

$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy$ =0；

否则利用方程z=f（x，y）表示曲面S，则得到

$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y))dxdy$ ，

其中D为曲面S在XY平面上的投影区域，正负号根据积分进行时是否沿着正法向来决定。

?

## 高斯公式以及散度。

在闭曲面上的曲面积分与闭曲面所包含的空间体积上的三重积分之间存在一个关系，即所谓的散度定理，或者说高斯公式：

设在空间区域 $\Omega$ 上存在 $C^1$ 函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$，而这个空间区域的边界为光滑可定向曲面组成，那么有

$$\oiint_{\partial\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv,$$

其中曲面积分是沿着曲面外侧进行的。

把高斯公式写成向量的形式，可以进一步看到高斯公式与格林公式的相似性，不过需要引入向量场的一个数值函数，即散度：

定义在向量场

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

的数值函数

$$div\vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

称为向量场在点（x，y，z）的散度。

那么高斯公式就可以写成向量形式：

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} div\vec{f}d\Omega,$$

又由于散度还可以应用向量微分算子来表示，因此又可以写成：

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{n}^0\cdot\vec{f}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{f}d\Omega,$$

可以看到高斯公式与格林公式的相似形式了。

如果把向量场直观理解为某种流量场的话，就可以把向量场中一点的散度，理解为向量场在该点的某种相对体积膨胀率，我们可以把该点用任意一个闭曲面包围起来，对这个曲面运用高斯公式，得到

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} div\vec{f}d\Omega,$$

如果向量场为 $C^1$ 函数，就可以对上面等式右边的三重积分应用积分中值定理，再使得闭曲面向该点收缩，体积趋向于0，得到

$$div\vec{f}(x,y,z) = \lim_{\Omega\to 0}\frac{\oiint_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot d\vec{S}}{\Omega}。$$

因此在物理场中，散度大于0的点称为源，而小于0的点称为汇，高斯公式更是具有非常明显的物理意义。

?

## 空间曲线积分以及旋度，斯托克斯公式。

从平面曲线积分可以很自然地推广到空间向量场对空间曲线的积分，并且同样存在相似的两种积分方式，即对弧长积分与对坐标积分，这里我们主要考虑对坐标积分，可以写成

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$ 。

空间曲线积分在所谓有势场里具有很好的性质，所谓有势场是指存在一个定义在相应空间区域的势能函数，使得所考虑的向量场为这个势能场的梯度。

而一个向量场同时是有势场的充要条件为

向量场

$$\vec{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

为有势场的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ ；

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$ ；

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$$ 。

然后对于一个有势场，其中定义的曲线积分具有如下性质：

设定义在单连通区域 $\Omega$ 的向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 同时为势能函数 $g(x,y,z)$ 的梯度，即为有势场，

（1） 那么对于空间区域内的任意曲线C，向量场在C上面的线积分与路径无关；

（2） 并且这个积分值等于势能函数在曲线两个端点的函数值的差。

上面关于有势场的充要条件还可以使用另一种表述，即引入一种新的描述向量场的运算，旋度。

所谓旋度是一个向量，为向量微分算子（哈密顿算子）与向量场的外积。写成

$$curl\vec{f}=rot\vec{f}=\nabla\times\vec{f}$$ 。

这样，有势场的充要条件也就可以表述为旋度为0的向量场。

?

利用旋度的概念，还可以把平面曲线上的格林公式推广到空间曲线上，得到所谓斯托克斯公式：

定义在空间区域 $\Omega$ 上的向量场

$$\vec{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

为 $C^1$ 向量场，S为空间区域 $\Omega$ 内以分段光滑曲线C作为边界的分片光滑曲面，则有

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_S \nabla\times\vec{f}\cdot d\vec{s}$$

其中C的环绕方向与S的正法向遵循右手法则。

非常类似于运用高斯公式可以更深刻地理解散度概念，运用斯托克斯公式也可以更深刻地理解旋度的概念。

类似地，对于向量场中的任意一点M，取一个以空间曲线C为边界的有界曲面S包含该点M，对它运用斯托克斯公式，并且使得S收缩趋向于M点，就得到

$$curl_{\vec{n}}\,\vec{f}(x,y,z)=\lim_{S\to M}\frac{\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s}}{S}$$ 。

反过来，对于向量场内的面积微元S，可以得到

$$curl_{\vec{n}}\vec{f}(x,y,z)S=\oint_C\vec{f}\cdot d\vec{s}$$ ，

称为向量场围绕闭曲线C的环量，这个表达式还可以理解为向量场沿着空间中任意闭曲线C的环量，等于向量场的旋度通过任意以C为边界的空间曲面S的通量。这种理解使得斯托克斯公式在物理学获得了广泛的应用。