第三章刚体转动

迄今为止，我们考虑质点系统的运动，还只是有限的几种情况，下面我们讨论的刚体定轴运动包含了一种新的运动形式，转动。至于刚体是由几乎无限多的粒子组成这点，却并不构成我们分析上的困难。因为刚体的定义就是组成刚体的粒子之间保持固定的相互位置关系，这就使得我们要描述刚体的运动并不需要同时描述所有粒子的运动。

实际上，当刚体平动时，所有粒子的运动状态都是一样的。而当刚体定轴转动时，各个粒子运动状态的差异，只是表现在它们距离定轴的大小不同而已。

因此本章的主要内容是讨论转动，而对于转动，我们固然可以只是使用我们已经学过的牛顿力学的那些基本方法来研究，但是，转动的最核心的特征，就是方向的改变，完全可以通过引入适当的新概念，来给予简明的描述。

实际上我们要强调对转动运动的描述与对平动运动的描述具有很大的类似性，下面，我们着重关注的就是应用什么样的概念来描述转动，并且总是围绕转动与平动的类似性来进行阐述。

刚体的定轴转动

对于刚体的转动，可以是非常的复杂，我们只考虑最简单的一种——定轴运动。这样，每一个粒子的运动轨迹都是一个圆周，而且所有的这些圆周平面都相互平行。

不过，由于定轴运动必须在三维空间处理，所以我们还必须在描述三维空间的几何方面作些准备。这就是我们前面讨论过的矢积。

在三维空间我们遇到的第一个问题就是如何确定方向。按照矢积的定义，我们根据右手法则来定义坐标的方向。

然后，我们再考虑要描述一个系统的运动状态，究竟需要多少变量，首先对于系统的几何描述，我们知道一个质点可以在三个方向运动，因此必须有三个变量，也就是说质点有三个自由度，那么一个包含n个质点的系统，就需要有3n个变量来描述，这显然是非常复杂的，不过对于刚体，由于它的质点之间的相互位置是固定的，因此3n个变量并不是相互独立的，而是可以根据约束条件消除非独立变量。实际上，刚体的自由度只有6个，而无论组成刚体的粒子数目是多少。这样对它的运动的描述就大为简化。

进一步，对于刚体的定轴运动，我们知道它的转动轴是静止的，因此刚体没有平动，它的自由度还必须减去3，这样描述刚体的定轴转动只需要3个位形变量。

转动动能。

然后我们再把做定轴转动的刚体看成绕分布在一根直线上的各自的圆心作圆周运动的质点的集合。从我们前面对质点的运动的研究出发，我们不妨首先给出质点的动能：

E=$mv^2/2$

其中v是各个质点的线运动速度。

然后我们知道动能是一个标量，那么我们可以把系统所以质点的动能都加起来，从而得到系统的总动能：

E= $(\sum \Delta m_i r_i^2)\frac{w^2}{2}$

其中r_i是刚体的每一个质点m_i到转轴的距离，?是刚体转动的角速度。

这就是系统的转动动能的定义。

在系统的转动动能表达式里，可以使用线速度，而实际问题里，对于转动我们更方便的测量是转动角速度，那么我们一般是用角速度来代替线速度，这里我们可以得到一个新的物理量—转动惯量。

转动惯量。

对于定轴转动的刚体，质点距离转轴的不同，就有不同的线速度，但是它们的角速度总是相同的。因此我们在转动动能的表达式里是用角速度代替线速度，从我们在上面所得到的转动动能的表达式：

$$E=(\sum \Delta m_i r_i^2)\frac{w^2}{2}$$

可以看出，我们把括号内的部分写成I，
因此转动动能也可以写成：

$$E=\frac{1}{2}I\cdot w^2$$

其中我们定义I为转动惯量。

由转动惯量的表达式，我们可以看到这个物理量和刚体的质量分布有关，而与刚体转动的速度无关。也就是说，它描述的是刚体的在转动中表现出来的相对于过质心的转动轴的质量分布。

进一步，我们可以把转动动能的表达式和平动质点的动能表达式相比较，就可以发现某种类似性，即转动角速度对应于平动线速度，而转动惯量类似于惯性质量，实际上从转动惯量的表达式可以看到，它的大小与刚体非转轴的部分的质点的质量成正比，而与每一个这样的质点到转轴的距离的平方成正比。这也是符合我们对于转动刚体的在转动中表现出来的惯性的直观。

因此我们要计算一个特定刚体的转动惯量，必须考虑它的几何形状和密度分布，然后由于它是一个和式，对于质量连续分布的刚体，就必须应用积分的方法来求它的转动惯量。

当然，我们一般处理的刚体都是密度均匀，并且几何形状也具有一定的对称性的刚体。这样就大大简化了我们的计算。

一般说来，我们应该通过练习来掌握一些规则形状的刚体的绕过质心的转轴的转动惯量的表达式，例如球体，圆柱体，圆锥体，立方体等，这样能便于我们的实际应用。

力矩。

以平面上的转动为例，我们知道对于进行匀速圆周运动的粒子，只要维持其圆周运动的向心力保持不变，在其他方向上的作用力为0，那么它将保持这种运动状态不变，除非在其他方向上的作用力不为0。我们知道作用于转动粒子的作用力总是可以分解为沿着转动半径的方向与垂直于半径方向的两个分量，对于定轴转动的刚体而言，沿着半径方向的分量是不起作用的。而垂直于半径方向的分量则必定要改变这个方向上粒子的线速度。而经常需要考虑的是粒子角速度的变化，但角速度的改变的效果是和粒子的转动半径有关的。由于角速度和线速度的关系可以直接应用矢积来表达，因此我们可以直接定义一个类似于力的物理量，用它来描述改变粒子圆周运动状态的作用，这就是力矩的概念。

$M=r\times F$

这也就是说，改变匀速定轴转动的运动状态的作用就是力矩，和平动中的改变质点直线匀速运动状态的作用就是力是非常类似的物理结论。因此可以这么说，作用力作用于转动物体，从而改变它的转动状态，是通过力矩的形式进行的。

尽管力矩与力具有相似性，但注意毕竟不是同一个概念，我们需要继续在下面的转动与平动的对比中，体会由于运动形式所带来的异同。

转动定理。

我们已经强调了力矩概念与力的概念的类似性，那么对于力矩是否也有类似于牛顿第一和第二定律的转动定律呢？我们直接可以由上面的分析得到。

首先，对于定轴转动的刚体，如果它所受到的对于它的转动轴而言的合力矩为0时，它的角速度就会保持不变。

这可以称为刚体转动的第一定律。

进一步，对于一个定轴转动的刚体，当它所受到的合力矩不是0时，存在关系式：

M=kIß

其中M是刚体所受到的合力矩，I是刚体的转动惯量，ß是刚体转动的角加速度，k为一个比例常数。可以通过取恰当的单位，使得k为1，而通过量纲分析（同学们自己不妨尝试分析一下，有助于我们利用量纲分析物理问题的能力），可以发现k是一个纯数。

那么就可以得到：

M=Iß

这可以称为刚体转动的第二定律。

我们可以看到这个表达式表明力矩的作用是导致了刚体转动的角加速度。

这两个定律加起来就是所谓的转动定律。

进一步，由于力的作用可以用沿着作用力的方向物体所移动的距离来表示，这就是功的概念，类似的是我们同样可以考虑力矩所作的功。

力矩的功。

我们可以从力对组成刚体的一个质点作功来推导力矩所作的功的物理含义。

我们任意取定轴转动的刚体上不在转轴上的一个质点，设刚体在外力作用下转过了一个角位移微元，则在这个角位移微元的移动过程中，外力对质点作功，可以写出作微功的表达式为：

dA=Md?

如果外力作用表现为恒定大小的力矩，在这个力矩作用下，刚体转动了?，则力矩所作功为：

A=M?

这个表达式一般地表示了力矩所作的功。

刚体定轴转动中的动能定理。

从一般的多粒子系统的角度来看，就可以得到刚体作定轴转动的动能的表达式：

Md?=I? d? =d（I?²/2）

对以上的微分表达式进行积分，就可以得到，当刚体在力矩作用下的动能变化的公式：

$$A=\int_{t_1\to t_2} Mdq=\frac{1}{2}Iw_2^2-\frac{1}{2}Iw_1^2$$

从以上表达式可以看到，合外力矩对定轴刚体所作功等于刚体转动的动能的增量。这就是刚体定轴转动中的动能定理。

另外，如果刚体转动系统还含有内力矩，则内力的总功为0。

动量矩和冲量矩。

我们在学习牛顿运动定律时，知道可以把力理解为动量的时间变化率，那么我们是否同样可以把力矩理解为某个物理量的时间变化率呢？

实际上，类似于动量的概念，在转动运动中，我们可以得到动量矩的概念：

$$\mathbf{M}=Ib=I\frac{dw}{dt}=\frac{d(Iw)}{dt}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

可以看到，我们把力矩表示为了一个新的物理量的时间变化率，这物理量被称为动量矩。

进一步，由平动运动的冲量概念，我们还可以通过对以上对时间的微分表达式再对时间积分，就可以得到冲量矩的概念：

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt=\int_{w_1}^{w_2} d(Iw)=Iw_2-Iw_1$$

即在一段时间内，合外力矩对转动物体的冲量矩等于这段时间内转动物体的动量矩的增量。这就是所谓动量矩定理。

动量矩守恒定律。

最后我们讨论物理学最重要的守恒定律之一，就是在转动运动时和动量守恒定律类似的动量矩守恒定律。

直接从动量矩的定义出发，如果转动物体所受外力矩的作用保持为0，即

$$\mathbf{M} = Ib = I\frac{dw}{dt} = \frac{d(Iw)}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0},$$

则可以得到动量矩L也保持不变，也就是说是一个守恒矢量。

这就是动量矩守恒定律。